

همس إروسن (اللويني)

الجبر الخطي المبسط

الطبعة الثانية

تأليف
هــوارد أنـون
جامعة دريكسيل

همس إروسن (اللويني)

همس إروسن (اللويني)



جون وايلي وأولاده

نيويورك - شيشستر - برينسين - تورنتو



الجبر الخطى المبسط

الطبعة الثانية

تأليف
هــوارد أنتون
جامعة ريكسيل

ترجمة

دكتور فايد فائق محمد غالب

قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة عين شمس
جمهورية مصر العربية

دكتور سامي داود

قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة عين شمس
جمهورية مصر العربية

مراجعة

دكتور راجي حليم مقار

أستاذ ورئيس قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة عين شمس
جمهورية مصر العربية

محمد يوسف الدويهي

جون وايلى وأولاده

نيويورك - شيشستر - برلين - تورنتو

Arabic Language Edition Copyright © 1982, by John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved.

Published simultaneously in England by
John Wiley & Sons, Ltd.

No part of this book may be reproduced by any means,
nor transmitted, nor translated into a machine language
without the written permission of the publisher.

حقوق النشر © ١٩٨٢ محفوظة لدار جون وايلي وأولاده .
جميع الحقوق محفوظة .

يتم نشر هذا الكتاب في ذات الوقت في إنجلترا بواسطة دار جون وايلي
وأولاده ليتم .

لا يجوز إعادة طبع أو نقل أو ترجمة أي جزء من أجزاء هذا الكتاب بآية وسيلة
دون إذن كتابي من الناشر .

ISBN — 0 — 471 — 06389 — 4

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

محمد يوسف اللواتي



مقدمة

يقدم هذا المرجع معالجة مبسطة للجبر الخطي بحيث تكون مناسبة للطلاب الجدد أو المنقولين إلى السنة الثانية في الجامعات . ولا يتطلب دراية بالتفاضل والتكامل . ولكن على الرغم من هذا فقد ضمنته عدداً من التمارين للطلبة الذين لديهم خلفية في التفاضل والتكامل وقد وضمت عليها بوضوح العلامة « للطلبة الذين درسوا التفاضل والتكامل » .

وكان هدفي من كتابة هذا الكتاب أن أقدم أساسيات الجبر الخطي بأكثر الطرق وضوحاً . وكان العامل التعليمي هو الاعتبار الأول والعامل الشكلي هو الاعتبار الثانوي . وقد درست الأفكار الأساسية ، كلما أمكن هذا ، بأمثلة حسابية (أكثر من مائتين) وبالتفسيرات الهندسية أيضاً .

وقد اختلفت طرق معالجاتي للإثباتات . فتلكت الإثباتات البدائية والتي لها مضمون تعليمي ملموس قد عرضت بدقة تامة وبأسلوب مفهوم للمتدئين وبعض الإثباتات الأكثر صعوبة ولكن المفيدة تعليمياً قد وضعت في نهاية القسم وأشار إليها « اختياري » وعلى الرغم من هذا قد حذفت إثباتات أخرى تماماً مع التركيز فقط على تطبيق النظرية . وفي كل مرة حذف الإثبات حاولت أن أوحى بالنتيجة عادة بمناقشة حول مغزاها في الفضاء الثنائي أو الفضاء الثلاثي .

ومن خبرتي فإن رمز Σ يكون عائقاً أكثر منه مفيداً للمتدئين في الجبر الخطي . لهذا فقد تجنبنت عموماً استخدامه .

ويعتبر فرضاً تعليمياً أن يسير المحاضر من المؤلف إلى غير المؤلف ومن المحدد إلى المجرد ويعكس ترتيب الأبواب مدى تمسكي بهذا المبدأ .

الباب الأول : يتعلق بأنظمة المعادلات الخطية وكيفية حلها وبعض خواصها ويحتوي أيضاً على المادة الأساسية في المصفوفات وخواصها الحسابية .

الباب الثاني : يتعلق بالهضدات . ولقد استخدمت المدخل التقليدي للترتيبات وفي اعتقادي أن هذا أقل تجريداً من المدخل بواسطة m من الصيغ الخطية المتبادلة ويعطى الطالب إدراكاً بديهياً لهذا الموضوع أفضل مما يعطيه التدرج الاستنتاجي .

الباب الثالث : يقدم المتجهات في الفضاء الثنائي والفضاء الثلاثي كأسهم ويطور الهندسة التحليلية للمستقيات والمستويات في الفضاء الثلاثي ويمكن حذف هذا الباب بدون أى تأثير على متابعة الكتاب اعتماداً على خلفية الطلاب (انظر التوجيه للمحاضر الذى يلى هذه المقدمة) .

يطور البابان الرابع والخامس النتائج الأساسية عن الفضاءات الخطية الحقيقية محدودة الأبعاد والتحويلات الخطية . ولقد بدأت بدراسة R^n ثم تقدمت خطوة خطوة للمعنى العام للمتجه .

يتعلق الباب السادس بمسألة القيم الذاتية والتحويل إلى الصورة القطرية .

يعطى الباب السابع بعض التطبيقات للجبر الخطى فى مسائل التقريب وأنظمة المعادلات التفاضلية ومتسلسلات فوريير وتصنيف القطوع المخروطية وسطوح الدرجة الثانية .

يقدم الباب الثامن طرق الجبر الخطى العددية ولا يتطلب مزيداً من الإمكانات الحسابية لأن التمارين يمكن حلها بالحساب اليدوى أو باستخدام حاسب جيب . يعطى هذا الباب الطالب فهماً أساسياً لكيفية حل بعض مسائل الجبر الخطى عملياً . الكثير من الطلبة يهون دراستهم للجبر الخطى بالاعتقاد الساذج أن القيم الذاتية تحسب عمليات بحل المعادلة المميزة . قد يرغب بعض المحاضرين فى إعطاء هذا القسم فى منهاج عن البرمجة .

وقد قدمت عدداً كبيراً من التمارين . وتبدأ كل مجموعة تمارين بتمرينات روتينية وتتقدم نحو التمارين النظرية . وإجابات جميع التمارين الحسابية معطاة فى نهاية هذا المرجع .

وحيث أنه توجد فى هذا الكتاب مادة أكثر مما يمكن تغطيته فى فصل دراسى واحد فيجب على المحاضر أن يقوم باختيار الموضوعات ، وللمساعدة فى هذا الاختيار فقد قدمت توجيهاً للمحاضر يلى هذه المقدمة .

ما هو الجديد فى الطبعة الثانية

لقد كان القبول الكبير للطبعة الأولى هو أكبر مكافأة ، والمؤلف شاكر للملاحظات القيمة والمقترحات البناءة التى وصلته من القراء . وبفضل هذه المقترحات أجريت التعديلات التالية :

• سرعة السير فى الباب الأول قد زادت قليلاً (اختزلت ثمانية أقسام إلى سبعة) لكى تسمح بوقت

إضافى لمادة أكثر صعوبة فيما بعد فى هذا المرجع .

• أميدت كتابة بعض الأقسام الأكثر صعوبة فى البابين ٥ ، ٦ وأعيد تنظيمهما لكى تصبح أفكارهما أكثر وضوحاً .

• أضيف باب عن التطبيقات وأعد ملحق اختياري غير مجلد مخصص لتطبيقات إضافية .

• أضيفت بعض التمارين الجديدة إلى مجموعات التمارين المختارة .

توجيه للمحاضر

يمكن حذف الباب الثالث بدون تأثير على تتبع الكتاب إذا كان الطلاب قد درسوا مسبقاً المستقيمت والمستويات والمتجهات الهندسية في القضاء الثانى وفى القضاء الثلاثى . تبعاً للوقت المسموح به وخلفية الطلبة قد يرغب المحاضر في إضافة كل أو جزء من هذا الباب إلى المادة الأساسية المقترحة التالية :

الباب الأول	٧ محاضرات
الباب الثانى	٥ محاضرات
الباب الرابع	١٤ محاضرة
الباب الخامس	٦ محاضرات
الباب السادس	٥ محاضرات

ويعتبر هذا التقسيم رجباً فهو يسمح بقدر كاف من وقت المحاضرة لمناقشة تمارين الواجبات المنزلية . ولكنه يفترض أيضاً أن وقتاً قليلاً من المحاضرة قدخصص للسادة التى أشير إليها « اختيارى » ، ويمكن للمحاضر أن يضيف على هذه المادة الأساسية ، بقدر ما يسمح به الوقت ، بعض المحاضرات من المادة الاختيارية ، الباب الثالث ، الباب السابع والباب الثامن .

ويمكن للمحاضرين الذين يرغبون في وقت إضافي لمناقشة التطبيقات أو الطرق العددية أن يحذفوا القسمين ٥ - ٣ ، ٥ - ٤ من المادة الأساسية . إذا تم ذلك فيجب أن يحذف المحاضر المادة الاختيارية في نهاية ١ - ٦ ثم يبدأ القسم ٦ - ٢ بصيغة المصفوفات للمسألين ١ ، ٢ ويحذف مثال ٩ من هذا القسم .

المحتويات

صفحة

١	١ - أنظمة المعادلات الخطية والمصفوفات	١
١	١ - ١ مقدمة عن أنظمة المعادلات الخطية	١
٨	١ - ٢ طريقة جاوس في الاختزال	٨
١٨	١ - ٣ الأنظمة المتجانسة للمعادلات الخطية	١٨
٢٢	١ - ٤ المصفوفات والعمليات عليها	٢٢
٣٠	١ - ٥ قواعد حساب المصفوفات	٣٠
٤١	١ - ٦ المصفوفات البسيطة وطريقة لإيجاد A^{-1}	٤١
٥٠	١ - ٧ نتائج أخرى عن أنظمة المعادلات وقابلية الانعكاس	٥٠
٥٨	٢ - المحددات	٥٨
٥٨	٢ - ١ دالة المحدد	٥٨
٦٣	٢ - ٢ حساب قيم المحددات باعتماد الصفوف	٦٣
٦٩	٢ - ٣ خواص دالة المحدد	٦٩
٧٦	٢ - ٤ المفكوك باستخدام المتسمات المميزة - قاعدة كرامير	٧٦
٨٨	٣ - المتجهات في الفضاء الثنائي والفضاء الثلاثي	٨٨
٨٨	٣ - ١ مقدمة في المتجهات (هندسية)	٨٨
٩٨	٣ - ٢ مقياس المتجه . حساب المتجهات (العمليات الحسابية للمتجهات)	٩٨
١٠٢	٣ - ٣ الضرب القياسي - المساقط	١٠٢
١٠٩	٣ - ٤ الضرب الاتجاهي	١٠٩
١١٨	٣ - ٥ المستقيمات والمستويات في الفضاء الثلاثي	١١٨

١٢٨	...	الفضاء الخطي	٤ -
١٢٨	...	١ - الفضاء الاقليدي التوفي	٤ -
١٣٤	...	٢ - الفضاء الخطي العام	٤ -
١٣٩	...	٣ - الفضاءات الجزئية	٤ -
١٥٠	...	٤ - الاستقلال الخطي	٤ -
١٥٧	...	٥ - الأساس والبعاد	٤ -
١٦٥	...	٦ - فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة لمصفوفة - الرتبة - تطبيقات على إيجاد الأساسات ...	٤ -
١٧٤	...	٧ - الفضاء ذو الضرب الداخلي	٤ -
١٨١	...	٨ - الطول والزوايا في الفضاءات ذات الضرب الداخلي	٤ -
١٨٨	...	٩ - الأساسات البيارية المتعامدة - عملية جرام - شميديت	٤ -
٢٠٠	...	١٠ - الاحداثيات - تغيير الأساس	٤ -
٢٢٢	...	التحويلات الخطية	٥ -
٢٢٢	...	١ - مقدمة للتحويلات الخطية	٥ -
٢٣١	...	٢ - خواص التحويلات الخطية : النواء والمبدى	٥ -
٢٣٩	...	٣ - مصفوفات التحويلات الخطية	٥ -
٢٥١	...	٤ - الاتفاق	٥ -
٢٥٧	...	القيم الذاتية - المتجهات الذاتية	٦ -
٢٥٧	...	١ - القيم الذاتية والمتجهات الذاتية	٦ -
٢٦٤	...	٢ - التحويل إلى الصورة القطرية	٦ -
٢٧٣	...	٣ - التحويل المودى إلى الصورة القطرية - المصفوفات المتماثلة	٦ -
٢٨٠	...	تطبيقات (هـ)	٧ -
٢٨٠	...	١ - تطبيقات في المعادلات التفاضلية	٧ -

صفحة

٢٨٧	تطبيقات في مسائل التقريب - متسلسلات فوريير	٧ - ٢
٢٩٣	الصيغ التريمية - تطبيق في القطوع المخروطية	٧ - ٣
٣٠٥	الصيغ التريمية - تطبيق على سطوح الدرجة الثانية	٧ - ٤

٨ - مقدمة في الطرق العددية للجبر الخطي

٣١٢	طريقة جاوس للمذف بالتركيز المحوري	٨ - ١
٣١٨	طريقة جاوس - سيدل وجاكوبي	٨ - ٢
٣٢٥	تقريب القيم الذاتية بطريقة القوى	٨ - ٣
٣٣٥	تقريب القيم الذاتية غير السائدة بطريقة تحليل المصفوفة	٨ - ٤

٣٤٠ اجوبة التمارين

٣٧٥ قائمة المصطلحات العلمية

٣٨١ الفهرس

١- أنظمة المعادلات الخطية والمصفوفات

١ - ١ مقدمة عن أنظمة المعادلات الخطية

سنقدم في هذا القسم المصطلحات الأساسية ونناقش إحدى طرق حل أنظمة المعادلات الخطية .

يمكن تمثيل الخط في المستوى xy جبرياً بواسطة معادلة على الصورة التالية :

$$a_1x + a_2y = b$$

تسمى أى معادلة من هذا النوع بمعادلة خطية في المتغيرين x ، y .

وبشكل أعم نعرف المعادلة الخطية في n متغير x_1 ، x_2 ، ... ، x_n بأنها معادلة يمكن التعبير عنها بالصورة :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

حيث a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، b ثوابت حقيقية .

مثال (١) :

المعادلات التالية معادلات خطية

$$x + 3y = 7 \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3z + 1 \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

لاحظ أن المعادلة الخطية لا تشمل أى حواصل ضرب أو جذور للمتغيرات . فتظهر جميع المتغيرات في الأس الأول (القوة الأولى) ولا تظهر كدلائل للوال مثلثية أو لوغاريتمية أو أسية . فلا تصلح المعادلات التالية أن تكون معادلات خطية .

$$x + 3y^2 = 7 \quad 3x + 2y - z + xz = 4$$

$$y - \sin x = 0 \quad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

حل المعادلة الخطية $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ هو متتابعة من n من الأعداد s_1 ،

s_2 ، ... ، s_n تحقق المعادلة عند إجراء التعويض $x_1 = s_1$ ، $x_2 = s_2$ ، ... ، $x_n = s_n$.

تسمى الفتة المكونة من كل حلول المعادلة بفتة الحل لها .

مثال (٢) :

أوجد فئة الحل لكل من المعادلات التالية

$$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5 \quad (٢)$$

$$4x - 2y = 1 \quad (١)$$

لإيجاد حلول المعادلة (١) يمكننا أن نعين قيمة اختيارية للمتغير x ونحل المعادلة لإيجاد y ، أو نختار قيمة اختيارية للمتغير y ونحل لإيجاد x إذا اتبعنا الاتجاه الأول فبتعيين قيمة اختيارية t للمتغير x نحصل على

$$x = t, \quad y = 2t - \frac{1}{2}$$

نصف هاتان المبرتان فئة الحل بواسطة دليل اختياري t . ويمكن الحصول على حلول عديدة خاصة بالتعويض بقيم معينة للدليل t . على سبيل المثال تعطى $t = 3$ الحل $x = 3, y = 11/2$ ، تعطى $t = -1/2$ الحل $x = -1/2$ و $y = -3/2$.

إذا اتبعنا الاتجاه الثانى وعينا المتغير y القيمة الاختيارية s ، نحصل على

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}, \quad y = t$$

رغم اختلاف هذه الصورة عن تلك التى حصلنا عليها فيما سبق ، إلا أنها تعطى نفس فئة الحل بمتغير t على جميع الأعداد الحقيقية الممكنة . على سبيل المثال تعطى المبرتان السابقتان الحل $x = 3$ و $y = 11/2$ عندما $t = 3$ و حين تعطى هذه الصورة نفس الحل عندما $t = 11/2$.

لإيجاد فئة الحل للمعادلة (٢) يمكننا أن نعين قيا اختيارية لأى متغيرين ثم نحل المعادلة لإيجاد المتغير الثالث . وبصفة خاصة إذا عينا قيا اختيارية s, t للمتغيرين x_2 و x_3 بالترتيب ثم أجرينا الحل لإيجاد x_1 نحصل على

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t$$

تسمى أى فئة منتهية من معادلات خطية فى المتغيرات x_1, x_2, \dots, x_n بنظام المعادلات الخطية . وتسمى متتابعة الأعداد s_1, s_2, \dots, s_n بحل للنظام . إذا كان $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ حلا لكل معادلة فى هذا النظام . على سبيل المثال نظام المعادلتين فى ثلاثة مجاهيل

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

يكون لها الحل $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ حيث أن هذه القيم تحقق كلتا المعادلتين ، مع ذلك $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 1$ ليست حلا لأن هذه القيم تحقق فقط المعادلة الأولى من معادلتى النظام .

ليس لكل أنظمة المعادلات الخطية حلول . على سبيل المثال إذا ضربنا المعادلة الثانية للنظام

$$x + y = 4$$

$$2x + 2y = 6$$

في $1/2$ يصبح واضحاً عدم وجود أى حل ، حيث أن المعادلتين في النظام الناتج

$$x + y = 4$$

$$x + y = 3$$

تتناقض كل منهما الأخرى .

يسمى نظام المعادلات الذي ليس له أى حل نظاماً متناقضاً (غير متآلف) أما إذا وجد حل واحد على الأقل فيسمى النظام نظاماً متآلفاً . ولتوضيح الحالات الممكنة عند حل أنظمة المعادلات الخطية ، اعتبر نظاماً لمعادلتين في مجهولين

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{كلاهما ليس بصفر} \quad a_1 \text{ و } b_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{كلاهما ليس بصفر} \quad a_2 \text{ و } b_2$$

الرسم البياني لماتين المعادلتين خطان مستقيمان ، دعهما I_1 ، I_2 بما أن النقطة (x, y) تقع على الخط المستقيم إذا - فقط إذا - حقق الممددان x ، y معادلة الخط المستقيم ، فإن حلول نظام المعادلات سوف تناظر نقط تقاطع I_1 مع I_2 وتوجد ثلاث حالات ممكنة (انظر شكل ١ - ١)

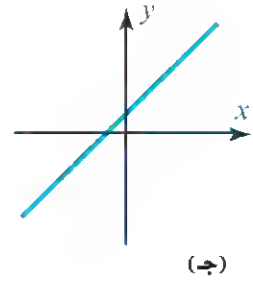
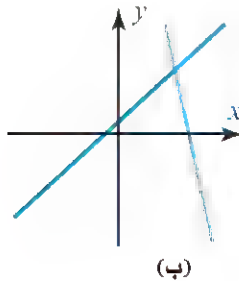
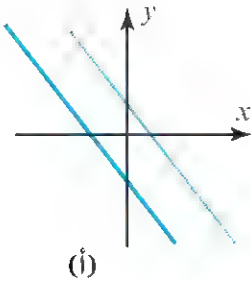
(أ) قد يكون الخطان I_1 و I_2 متوازيين ، في هذه الحالة لا يوجد تقاطع ، وبالتالي لا يوجد حل للنظام .

(ب) قد يتقاطع الخطان I_1 و I_2 في نقطة واحدة فقط ، في هذه الحالة يكون للنظام حل واحد بالضبط .

(ج) قد ينطبق الخطان I_1 ، I_2 ، وفي هذه الحالة يوجد عدد لا نهائى من نقط التقاطع ، وبالتالي عدد لا نهائى من الحلول للنظام .

(شكل ١ - ١) (أ) لا يوجد حل (ب) يوجد حل واحد

(ج) يوجد عدد لا نهائى من الحلول



رغم أننا قد أخذنا هنا فقط معادلتين في مجهولين إلا أننا سوف نبين فيما بعد أن هذه النتيجة نفسها منطبقة على أى نظام اختياري ، بمعنى أن لكل نظام للمعادلات الخطية : إما لا يوجد أى حل ، أو يوجد حل واحد أو يوجد عدد لا نهائى من الحلول .

أى نظام اختياري لعدد m من المعادلات الخطية في n من المجهيل سيكتب

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث المجهيل هي x_1, x_2, \dots, x_n ، a_{ij} و b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) تدل على ثوابت . ($j = 1, 2, \dots, n$)

على سبيل المثال ، سوف يكتب أى نظام عام لثلاث معادلات خطية في أربعة مجهيل على الصورة

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

يعتبر وضع الدليلين الثنائيين لمعاملات المجهيل وسيلة مفيدة سوف نستخدمها لتحديد موضع المعامل في النظام . يشير الدليل الأيسر للمعامل a_{ij} إلى المعادلة التي يقع فيها المعامل ، ويشير الدليل الأيمن إلى المجهول المضروب فيه ولهذا فإن a_{12} توجد في المعادلة الأولى وتضرب في المجهول x_2 .

إذا تتبعنا - في ذهننا - مسار مواقع كل من إشارات الزائد + والمجهيل x وعلامات التساوى فإنه يمكننا أن نوجز النظام بعدد m من المعادلات الخطية في n من المجهيل في كتابة ترتيب للأعداد على شكل مستطيل .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

يسمى هذا الترتيب بالمصفوفة الممتدة للنظام (يستخدم اللفظ « مصفوفة » في الرياضيات ليدل على ترتيبية مستطيلة من الأعداد . وتظهر المصفوفات في مقامات عديدة ، وسوف ندرسها في فصول تالية بتفصيل أوسع) .

لتوضيح فإن المصفوفة الممتدة لنظام المعادلات

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

ملحوظة :

عند بناء أى مصفوفة ممتدة يجب كتابة المجاهيل بنفس الترتيب فى كل معادلة .

الطريقة الأساسية لحل أى نظام لمعادلات خطية هى بإحلال النظام المحلى بنظام جديد له نفس الحل ، ولكنه أسهل فى الحل . يتم الحصول - بشكل عام - على النظام الجديد فى سلسلة من الخطوات بواسطة تطبيق الأنواع الثلاثة الآتية من عمليات حذف منتظم للمجاهيل .

١ - اضرب معادلة بكاملها فى ثابت غير صفري .

٢ - أبدل معادلتين .

٣ - أضف مضاعف معادلة لمعادلة أخرى .

بما أن الصفوف (الخطوط الأفقية) فى المصفوفة الممتدة تناظر المعادلات فى النظام القرين لها فإن هذه العمليات الثلاث تناظر العمليات الآتية على صفوف المصفوفة الممتدة .

١ - اضرب صفًا بكامله فى ثابت غير صفري .

٢ - أبدل صفين .

٣ - أضف مضاعف صف لصف آخر .

تسمى هذه العمليات بعمليات أولية على المصفوفة . يوضح المثال التالى كيف يمكن استخدام هذه العمليات لحل أنظمة لمعادلات خطية . حيث أن الطريقة المنتظمة لإيجاد حلول للأنظمة سوف تشق فى القسم التالى ، فليس من الضروري الانشغال بكيفية انتقاء الخطوات فى هذا المثال . يجب أن يخصص الجهد الأساسى فى هذا الوقت لفهم الحسابات والمناقشة .

مثال (٢) :

فى أسفل العمود الأيمن نحل نظاماً لمعادلات خطية بواسطة عمليات على المعادلات فى النظام ، وفى العمود الأيسر نحل نفس النظام بواسطة عمليات على صفوف المصفوفة الممتدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

اضرب الصف الأول فى 2 - ثم أضف الناتج إلى الصف الثانى لتحصل على

اضرب المعادلة الأولى فى 2 - ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثانية لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y + 2z = 9$$

$$2y - 7z = -17$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

اضرب المعادلة الأولى في 3 - ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثالثة لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

اضرب الصف الثاني في 1/2 لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

اضرب الصف الثاني في 3 - ثم أضف الناتج إلى الصف الثالث لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

اضرب الصف الثالث في -2 لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

اضرب الصف الثاني في 1 - ثم أضف الناتج إلى الصف الأول لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

اضرب الصف الثاني في $\frac{1}{2}$ - ثم أضف الناتج إلى الصف الأول واضرب الصف الثالث في $\frac{1}{2}$ ثم أضف الناتج إلى الصف الثاني لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

واضحاً الآن .

اضرب المعادلة الأولى في 3 - ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثالثة لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

اضرب المعادلة الثانية في 1/2 لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

اضرب المعادلة الثانية في 3 - ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثالثة لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

اضرب المعادلة الثالثة في 2 - لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

اضرب المعادلة الثانية في 1 - ثم أضف الناتج إلى المعادلة الأولى لتحصل على

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}z &= \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

اضرب المعادلة الثالثة في $\frac{1}{2}$ - ثم أضف الناتج إلى المعادلة الأولى واضرب المعادلة الثالثة في $\frac{1}{2}$ ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثانية لتحصل على

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

ويكون الحل

تمارين ١ - ١

١ - أى من المعادلات الآتية يعتبر معادلات خطية في x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{array}{ll} (أ) & x_1 + 2x_1x_2 + x_3 = 2 \\ (ب) & x_1 + x_2 + x_3 = \sin k \text{ (ثابت } k) \\ (ج) & x_1 - 3x_2 + 2x_3^{1/2} = 4 \\ (د) & x_1 = \sqrt{2x_3} - x_2 + 7 \\ (هـ) & x_1 + x_2^{-1} - 3x_3 = 5 \\ (و) & x_1 = x_3 \end{array}$$

٢ - أوجد فئة الحل لكل من المعادلات الآتية :

$$\begin{array}{ll} (أ) & 6x - 7y = 3 \\ (ب) & 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 8 \\ (ج) & -3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 5 \\ (د) & 2z - w + 3x + y - 4z = 0 \end{array}$$

٣ - أوجد المصفوفة الممتدة لكل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية :

$$\begin{array}{ll} (أ) & \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{array} \\ (ب) & \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{array} \\ (ج) & \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = 3 \end{array} \\ (د) & \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array} \end{array}$$

٤ - أوجد نظام معادلات خطية مناظراً لكل من المصفوفات الممتدة الآتية :

$$\begin{array}{ll} (أ) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ (ب) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ (ج) & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ (د) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

٥ - لأى قيمة (قيم) للثابت k يكون للنظام الآتى : عدد لا نهائى من الحلول ؟ حل واحد بالضبط ؟ لا يوجد أى حل ؟

$$\begin{array}{l} x - y = 3 \\ 2x - 2y = k \end{array}$$

٦ - باعتبار نظام المعادلات

$$\begin{array}{l} ax + by = k \\ cx + dy = l \\ ex + fy = m \end{array}$$

ادرس الأوضاع النسبية المخطوط المستقيمة $ax + by = k$ ، $cx + dy = l$ ، $ex + fy = m$ عندما :

- لا يوجد للنظام أى حل
- يوجد للنظام حل واحد بالضبط
- يوجد للنظام عدد لا نهائى من الحلول

٧ - بين أنه إذا كان نظام المعادلات الخطية في تمرين ٦ متآلفاً فيمكن إسقاط معادلة واحدة على الأقل دون تغيير فئة الحل .

٨ - بين أن النظام في تمرين ٦ يجب أن يكون متآلفاً إذا وضعنا $k = l = m = 0$ ماذا يمكن أن يقال عن نقطة تقاطع المستقيمتين الثلاثة إذا كان للنظام حل واحد بالضبط ؟

٩ - باعتبار نظام المعادلات .

$$x + y + 2z = a$$

$$x + z = b$$

$$2x + y + 3z = c$$

بين أنه لكي يكون هذا النظام متآلفاً يجب أن تحقق a, b, c الشرط $c = a + b$.

١٠ - أثبت أنه إذا كان لمطين المستقيمتين $x_1 + kx_2 = c$ ، $x_1 + lx_2 = d$ نفس فئة الحل فإن المعادلتين معادلة واحدة بمتغيرها .

١ - ٢ طريقة جاوس في الاختزال

سنعطى في هذا القسم طريقة منتظمة ، لحل أنظمة المعادلات الخطية ، موضوعة على أساس فكرة اختزال المصفوفة الممتدة إلى صورة بسيطة بشكل كاف يمكن من حل نظام المعادلات بالمعانية .

في الخطوة الأخيرة للمثال ٣ حصلنا على المصفوفة الممتدة والتي كان الحل واضحاً منها .

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad (1.1)$$

تعتبر المصفوفة ١ - ١ مثلاً لمصفوفة في الشكل الصفي المميز المختزل . لكي تكون المصفوفة على هذه الصورة يجب أن تتوفر لها الخواص التالية :

١ - إذا لم يكن الصف مكوناً بكامله من أصفار ، فيكون 1 هو العنصر الأول غير الصفري في الصف (يسمى هذا العنصر بالواحد المتقدم) .

٢ - إذا وجدت أي صفوف مكونة بكاملها من أصفار لتجمع معاً في قاع المصفوفة .

٣ - في أي صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من أصفار يوجد الواحد المتقدم في الصف الأسفل أيمن الواحد المتقدم في الصف الأعلى .

٤ - يكون بالعمود المحتوي على واحد متقدم أصفار في كل مكان عدا هذا العنصر .

تسمى المصفوفة المتوفرة لها الخواص ١ ، ٢ ، ٣ بمصفوفة في الشكل الصفي المميز .

مثال (٤) :

المصفوفات الآتية في الشكل الصنى المميز المختزل

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

والمصفوفات الآتية في الشكل الصنى المميز .

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عل القارىء أن يتحقق من كون المصفوفات السابقة تحقق كل المتطلبات اللازمة .

ملحوظة : ليس من الصعب أن نرى أن أى مصفوفة في الشكل الصنى المميز تحوى أصفاراً تحت كل واحد متقدم (انظر مثال ٤) . وفى المقابل يجب أن تحوى المصفوفة في الشكل الصنى المميز المختزل أصفاراً أعلى وأسفل الواحد المتقدم .

إذا وضعت المصفوفة الممتدة لنظام المعادلات الخطية - بواسطة متتالية من عمليات أولية على الصفوف - في الشكل الصنى المميز المختزل - فيمكن الحصول على فئة الحل للنظام بالمعينة أو على أسوأ حال بعد قليل من الخطوات البسيطة .

ويوضح المثال الآتى هذه النقطة .

مثال (٥) :

افترض أن المصفوفة الممتدة لنظام ما من المعادلات الخطية قد اختزلت بواسطة عمليات على الصفوف إلى الشكل الصنى المميز المختزل المعطى على الصورة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

حل كل نظام

حل (أ) : نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

نجد بالمعينة أن $x_3 = 4$ ، $x_2 = -2$ ، $x_1 = 5$

حل (ب) : نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_4 &= -1 \\x_2 + 2x_4 &= 6 \\x_3 + 3x_4 &= 2\end{aligned}$$

تسمى x_1 ، x_2 ، x_3 بالمتغيرات المستقلة حيث أنها تناظر الأعداد المستقلة ويمثل الحل للمتغيرات المستقلة بدلالة x_4 :

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 - 4x_4 \\x_2 &= 6 - 2x_4 \\x_3 &= 2 - 3x_4\end{aligned}$$

نحصل على عدد لا نهائي من الحلول حيث أن x_4 يمكن أن تمثل قيمة اختيارية وليكن t وتمثل فئة الحل بواسطة الصيغ

$$x_1 = -1 - 4t, \quad x_2 = 6 - 2t, \quad x_3 = 2 - 3t, \quad x_4 = t$$

حل (ج) : نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned}x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= -2 \\x_3 + 3x_5 &= 1 \\x_4 + 5x_5 &= 2\end{aligned}$$

وتكون x_1 ، x_3 ، x_4 المتغيرات المستقلة هنا . ويمثل الحل للمتغيرات المستقلة بدلالة المتغيرات الباقية

$$\begin{aligned}x_1 &= -2 - 4x_3 - 6x_2 \\x_3 &= 1 - 3x_5 \\x_4 &= 2 - 5x_5\end{aligned}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول حيث أن x_5 يمكن أن تمثل قيمة اختيارية t وأيضاً x_2 يمكن أن تمثل قيمة اختيارية s ، وتمثل فئة الحل بواسطة الصيغ

$$x_1 = -2 - 4t - 6s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 1 - 3t, \quad x_4 = 2 - 5t, \quad x_5 = t$$

حل (د) : المعادلة الأخيرة في نظام المعادلات المناظر هي

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

حيث أن هذه المعادلة لا يمكن أن تتحقق . إذن لا يوجد حل للنظام .

لقد رأينا منذ قليل كيف أنه من السهل حل نظام لمعادلات خطية متى كانت مصفوفتها الممتدة في الشكل الصن المميز المختزل . سنطلي الآن طريقة الحذف خطوة خطوة ، المعروفة بطريقة جاوس - جوردان الحذف* ، والتي يمكن استخدامها لاخذال أى مصفوفة إلى مصفوفة في الشكل الصن المميز المختزل . ونحن ننص على كل خطوة ، لتوضيح الفكرة ، باخذال المصفوفة الآتية إلى الشكل الصن المميز المختزل

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

خطوة (١) : عين أقصى عمود (خط رأسى) إلى اليسار ، لتكون عناصره بكاملها أصفاراً

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

أقصى عمود غير صفري إلى اليسار

خطوة (٢) : ابدل الصف الأعلى مع صف آخر ، إذا لزم ذلك ، لكي يكون العدد المدخل عند قمة العمود المشار إليه في خطوة (١) مختلفاً عن الصفر .

لقد ابدل الصفان الأول والثاني في المصفوفة السابقة .

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

خطوة (٣) : إذا كان العدد a هو المدخل الموجود الآن على قمة العمود المشار إليه في خطوة ١ ، فاضرب الصف الأول في $1/a$ لكي يظهر واحد متقدم

لقد ضرب الصف الأول للمصفوفة السابقة في $1/2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

خطوة (٤) : أضف مضافات مناسبة للصف الأعلى إلى الصفوف التي تحته بحيث تصبح العناصر تحت الواحد المتقدم أصفاراً .

أضف إلى الصف الثالث حاصل ضرب -2 في الصف الأول للمصفوفة السابقة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

(*) كارل فردريك جاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) ينسب لحياته أمير الرياضيين . أسهم جاوس أسهميات منصفة في نظرية الأعداد ونظرية الدوال والاحتمالات والاحصاء . واكتشف طريقة لحساب مسارات النجيبات واكتشف اكتشافات أساسية في النظرية الكهرومغناطيسية واخترع تليفوناً . كميل جوردان (١٨٢٨ - ١٩٢٢) . كان جوردان استاذاً بمعهد الصناعات بباريس وقد عمل أعمالاً رائدة في فروع متعددة من الرياضيات بما في ذلك نظرية المصفوفات . وهو بصفة خاصة مشهور بسبب « نظرية جوردان للمنحنى » التي تنص على أن أى منحنى بسيط مغل (مثل الدائرة أو المربع) يقسم المستوى إلى منطقتين منفصلتين غير متقاطعتين .

خطوة (٥) : اعمل الآن الصف الأعلى المصفوفة (وذلك بتغطيته مثلا) وأبدأ مرة أخرى بتطبيق الخطوة الأولى على المصفوفة الجزئية التي تبقى . واصل في هذا الطريق حتى تصير المصفوفة التامة (الأصلية) في الشكل الصنى المميز .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

افس الامدة غير الصفية يسارا
في المصفوفة الجزئية .

لقد ضرب الصف الأول
للمصفوفة الجزئية
في $1/2$ ليظهر واحد
متقدم .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

لقد أضف الى الصف
الثاني للمصفوفة الجزئية
حاصل ضرب الصف الأول
للمصفوفة الجزئية
في 5- ليظهر صفر تحت
الواحد المتقدم .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

تم تغطية الصف الأعلى
للمصفوفة الجزئية وعدنا
مرة أخرى للخطوة ١

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

افس الامدة غير الصفية يسارا
في المصفوفة الجزئية الجديدة .

لقد ضرب الصف الأول
(والوحيد) للمصفوفة
الجزئية الجديدة في 2
ليظهر واحد متقدم .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة التامة (الأصلية) الآن في الشكل الصنى المميز . لإيجاد الشكل الصنى المميز المتحول نحتاج إلى الخطوة الإضافية التالية .

خطوة (٦) : باليد بالصف غير الصفري الأخير وبالمثل لأعل ، اخف مضاعفات مناسبة لكل صف إلى الصفوف التي تملوه لتظهر أصفار فوق الأحاد المتقدمة

لقد أضف الى الصف
الثاني حاصل ضرب الصف
الثالث للمصفوفة السابقة
في $7/2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لقد أضيف الى
الصف الاول
حاصل ضرب
الصف الثالث في -6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لقد أضيف الى
الصف الاول حاصل
ضرب الصف الثاني
في 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة الأخيرة في الشكل الصن المميز المختزل .

مثال (٦) :

حل بطريقة جاوس - جوردان لمثلث نظام المعادلات الخطية

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$$

$$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$$

المصفوفة الممتدة لهذا النظام هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

إضافة حاصل ضرب الصف الأول في 2 - إلى الصفين الثاني والرابع تعطي

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

ضرب الصف الثاني في 1 - ثم إضافة حاصل ضرب الصف الثاني في 5 - إلى الصف الثالث وحاصل

ضرب الصف الثاني في 4 - إلى الصف الرابع تعطي

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

تبدیل الصفین الثالث والرابع ثم ضرب الصف الثالث المصفوفة الناتجة في $1/6$ يعطى الشكل الصنى المميز

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إضافة حاصل ضرب الصف الثالث في -3 إلى الصف الثاني ثم إضافة ضعف الصف الثاني المصفوفة الناتجة إلى الصف الأول تعطى الشكل الصنى المميز المختزل

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(لقد أحلنا المعادلة الأخيرة $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0 + 0x_6 = 0$ لأنها سوف تتحقق تلقائياً بحل المعادلات المتبقية)

بالحل للمعادلات المتقدمة ، نحصل على

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

إذا أعطينا المتغيرات x_2 ، x_4 ، x_5 ، القيم الاختيارية r ، s ، t ، على الترتيب فإننا نحصل على فئة الحل بواسطة الصيغ

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

مثال (٧) :

غالباً ما يكون من الأسب حل نظام من المعادلات الخطية أن نأق بالمصفوفة الممتدة إلى الشكل الصنى المميز دون مواصلة كل الطريق إلى الشكل الصنى المميز المختزل . عندما يتم ذلك يمكن حل النظام المناظر للمعادلات الخطية بأسلوب يسمى بالتصويهن الخلق . سنوضح هذه الطريقة باستخدام نظام المعادلات في مثال ٦ .

من حسابات مثال ٦ ، يكون مايل شكلاً صفياً مميزاً للمصفوفة الممتدة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل نظام المعادلات المناظر

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

نستمر كما يلي :

خطوة (١) : حل المعادلات للمتغيرات المتقدمة

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

خطوة (٢) : بالبدء بالمعادلة السفلى وبالعامل إلى أعلى ، عوض بالتتابع بكل معادلة في جميع المعادلات أعلاها .

التمويض بالمعادلة $x_6 = 1/3$ في المعادلة الثانية يعطي

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

التمويض بالمعادلة $x_3 = -2x_4$ في المعادلة الأولى يعطي

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

خطوة (٣) : أعط قيما اختيارية للمتغيرات غير المتقدمة .

إذا أعطينا المتغيرات x_2 ، x_4 ، x_5 القيم الاختيارية r ، s ، t على الترتيب فإن الحل يعطى بواسطة الصيغ الآتية :

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

ويتفق هذا مع الحل الذى حصلنا عليه في مثال (٦) .

تسمى طريقة حل أنظمة المعادلات الخطية بواسطة اختزال المصفوفة الممتدة إلى شكل صفى مميز بطريقة جاوس للحدف .

ملحوظة : الطريقة التى أعطيناها لاختزال مصفوفة إلى شكل صفى مميز أو شكل صفى مميز مختزل مناسبة تماماً لتنفيذها على الحاسب الألكترونى ، لأنها طريقة منتظمة . ولكن هذه الطريقة تظهر أحياناً كمسوراً يجب تجنبها وذلك بتغيير الخطوات في الاتجاه الصحيح . طالما يتم إتقان الطريقة الأساسية قد يرغب القارئ تغيير الخطوات في مسائل معينة ليتجنب الكسور (انظر تمرين ١٣) . يمكن إثبات - رغم أننا لن نفعل ذلك ، أنه مهما اختلفت العمليات الأولية على الصفوف فإننا نصل دائماً إلى نفس الشكل الصفى المميز المختزل . بمعنى آخر ، يكون الشكل الصفى المميز المختزل وحيداً . ولكن الشكل الصفى المميز ليس وحيداً ، فيمكن الوصول إلى شكل صفى مميز مختلف بتغيير متتابعة العمليات الأولية على الصفوف (انظر تمرين ١٤) .

تمارين ١ - ٢

١ - أى من المصفوفات التالية فى الشكل الصنى المميز المختزل ؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (و) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

٢ - أى من المصفوفات التالية فى شكل صنى مميز ؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (و) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (هـ) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (د)$$

٣ - اعتبر فى كل جزء أن المصفوفة الممتدة لنظام من المعادلات الخطية قد اختزلت بواسطة عمليات على

الصفوف إلى الشكل الصنى المميز المختزل المعطى . حل النظام .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

٤ - اعتبر فى كل جزء أن المصفوفة الممتدة لنظام من المعادلات الخطية قد اختزلت بواسطة عمليات على

الصفوف إلى الشكل الصنى المميز المعطى . حل النظام .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

٥ - حل كلا من الأنظمة الآتية بطريقة جاوس - جوردان لحذف .

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (ب) \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \quad (أ) \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \quad (ج) \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 18x_5 = 0 \end{array}$$

٦ - حل كلا من الأنظمة في تمرين ٥ بطريقة جاوس لحذف .

٧ - حل كلا من الأنظمة الآتية بطريقة جاوس - جوردان لحذف .

$$\begin{array}{ll} 4x_1 - 8x_2 = 12 & (ج) \\ 3x_1 - 6x_2 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15 \quad (ب) \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 11x_1 + 7x_2 = -30 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = -2 \quad (أ) \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{array}$$

٨ - حل كلا من الأنظمة في تمرين ٧ بطريقة جاوس لحذف .

٩ - حل كلا من الأنظمة الآتية بطريقة جاوس - جوردان لحذف .

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \quad (ب) \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \quad (أ) \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}$$

١٠ - حل كلا من الأنظمة في تمرين ٩ بطريقة جاوس لحذف .

١١ - حل الأنظمة الآتية ، حيث a ، b ، c ثوابت .

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = a \quad (ب) \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + y = a \quad (أ) \\ 3x + 6y = b \end{array}$$

١٢ - لأي قيمة للثابت a يوجد للنظام الثاني : حل واحد بالضبط ؟ يوجد عدد لا نهائى من الحلول ؟ لا يوجد أى حل ؟

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 4 \\ 3x - y + 5z & = & 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z & = & a + 2 \end{array}$$

١٣ - اختزل

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل الصغرى المميز المختزل بدون إظهار أى كسر .

١٤ - أوجد شكلين صفيين يميزين مختلفين المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

١٥ - حل النظام التالى من المعادلات غير الخطية ، بالنسبة للمجايل α ، β ، γ حيث $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ و $0 \leq \beta \leq 2\pi$ و $0 \leq \gamma < \pi$.

$$2 \sin \alpha - \cos \beta + 3 \tan \gamma = 3$$

$$4 \sin \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma = 2$$

$$6 \sin \alpha - 3 \cos \beta + \tan \gamma = 9$$

١٦ - صف الأشكال الصفية المميزة المحتملة الممكنة للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

١٧ - أثبت أنه إذا كانت $ad - bc \neq 0$ فإن الشكل الصفى المميز للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ هو } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

١٨ - استخدم تمرين ١٧ لتثبت أنه إذا كانت $ad - bc \neq 0$ فيوجد للنظام

$$ax + by = k$$

$$cx + dy = l$$

حل واحد بالضبط .

١ - ٣ الأنظمة المتجانسة للمعادلات الخطية

يوجد لكل نظام من أنظمة المعادلات الخطية ، كما أشرنا من قبل ، إما حل واحد أو عدد لا نهائى من الحلول ، أو لا يوجد أى حل على الإطلاق . عندما نتقدم ، سوف نجد حالات لانهم فيها بإيجاد حلول لنظام معطى ، بقدر ما نكرس اهتمامنا بتقرير عدد الحلول للنظام . نعطى فى هذا القسم حالات مختلفة يمكن فيها تقرير عدد الحلول بالمعانية .

نظام المعادلات الخطية يسمى متجانساً إذا كانت كل الحدود الثابتة أصفاراً ، بمعنى أن النظام على الصورة

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

جميع الأنظمة المتجانسة للمعادلات الخطية متأكفة لأن $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، ... ، $x_n = 0$ هي دائماً حل . يسمى هذا الحل بالحل التافه ، وإذا وجدت حلول أخرى فتسمى هذه الحلول بالحلول غير التافه . حيث إن أى نظام متجانس من المعادلات الخطية يجب أن يكون متأكفاً ، فوجود النظام إما حل واحد أو عدد لا نهائى من الحلول . حيث إن حلاً منهما يكون تافهاً .

يمكننا أن نقرر التالى :

تتحقق لأى نظام متجانس من المعادلات الخطية إحدى المقولتين التاليتين :

١ - يوجد للنظام الحل التافه فقط .

٢ - يوجد للنظام عدد لا نهائى من الحلول غير التافه بالإضافة إلى الحل التافه .

توجد حالة واحدة يتأكد عندها وجود حل غير تافه للنظام المتجانس ، بالتحديد ، عندما يحوى النظام مجاهيل أكثر من المعادلات . لرؤية السبب ، ندرس المثال التالى لأربع معادلات فى خمسة مجاهيل .

مثال (٨) :

حل النظام المتجانس التالى للمعادلات الخطية بطريقة جاوس - جوردان لحذف

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

المصفوفة الممتدة للنظام هي

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

المختزل المصفوفة إلى الشكل المصفى المختزل لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فيكون نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

الحل للمجاهيل المتقدمة يعطى

$$\begin{aligned}x_1 &= -x_2 - x_5 \\x_3 &= -x_5 \\x_4 &= 0\end{aligned}$$

وإذن تعطى فئة الحل بواسطة

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

لاحظ أننا نحصل على الحل ذاته عندما $s = t = 0$.

يوضح مثال ٨ نقطتين هامتين عن حل الأنظمة المتجانسة للمعادلات الخطية . أولاً ، أى من العمليات الثلاث الأولية على الصفوف لا يمكن أن تغير العمود الأخير للأصفار فى المصفوفة الممتدة ، ولذلك فنظام المعادلات المناظر للمصفوفة الممتدة فى الشكل الصنى المميز المختزل يجب أن يكون أيضاً نظاماً متجانساً . (انظر النظام 1.3 فى مثال ٨) . ثانياً اعتماداً على التواجد من عدمه لصفوف صفيرية فى الشكل الصنى المميز المختزل للمصفوفة الممتدة ، يكون عدد المعادلات فى النظام المختزل أقل أو مساوياً لعدد المجاهيل فى النظام الأصل (قارن النظامين 1.2 و 1.3 فى مثال ٨) . لذلك إذا كان للنظام المتجانس المعطى عدد m من المعادلات فى عدد n من المجاهيل بحيث كانت $m < n$ ، وإذا وجد عدد r من الصفوف غير الصفيرية فى الشكل الصنى المميز المختزل للمصفوفة الممتدة فإنه يكون $r < n$ ، وعليه فإن نظام المعادلات المناظر للمصفوفة الممتدة فى الشكل الصنى المميز المختزل سيكون على الصورة

$$\begin{aligned}\cdots x_{k_1} &+ \Sigma () = 0 \\ \cdots x_{k_2} &+ \Sigma () = 0 \\ &\vdots \\ x_{k_r} &+ \Sigma () = 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

حيث $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ هى المتغيرات المتقدمة ، $\Sigma ()$ ترمز إلى التجميعات التى تحوى العدد $n - r$ من المتغيرات الباقية . الحل للمتغيرات المتقدمة يعطى

$$\begin{aligned}x_{k_1} &= -\Sigma () \\ x_{k_2} &= -\Sigma () \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= -\Sigma ()\end{aligned}$$

كما فى مثال ٨ ، يمكننا إعطاء قيم اختيارية للمجاهيل فى الطرف الأيمن وبهذا نحصل على عدد لانهائى من الحلول للنظام .

تلخيصاً لما سبق لدينا النظرية الهامة الآتية :

نظرية ١ : يوجد دائماً عدد لانهائى من الحلول للنظام المتجانس من المعادلات الخطية الذى فيه عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات .

تمارين ١ - ٣

١ - دون استخدام ورقة وقلم ، حدد لأي من الأنظمة المتجانسة التالية توجد حلول غير تافهة .

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 & (ب) \quad x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \quad (أ) \\ x_2 + 4x_3 = 0 & 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_3 = 0 & 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 & (د) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \quad (ج) \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{array}$$

في التمارين من ٢ إلى ٥ حل المعطى من الأنظمة المتجانسة المعادلات الخطية .

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & - \quad \text{٣} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 & x_1 + 2x_2 = 0 \\ & x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x + 6y - 2z = 0 & - \quad \text{٥} \quad 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad - \quad \text{٤} \\ 2x - 4y + z = 0 & x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ & - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

٦ - لأي قيمة (قيم) الثابت λ توجد حلول غير تافهة للنظام .

$$\begin{array}{l} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{array}$$

٧ - باعتبار نظام المعادلات

$$\begin{array}{l} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \\ ex + fy = 0 \end{array}$$

ناقش الأوضاع النسبية لمخطوط $ax + by = 0$ ، $cx + dy = 0$ ، $ex + fy = 0$ عندما

(أ) يوجد للنظام الحل التافه فقط

(ب) يوجد للنظام حلول غير تافهة

٨ - باعتبار النظام

$$\begin{array}{l} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{array}$$

(أ) بين أنه إذا كان $x = x_0$ ، $y = y_0$ أي حل و k أي ثابت فإن $x = kx_0$ ، $y = ky_0$ أيضاً حل .

(ب) بين أنه إذا كان $x = x_0$ ، $y = y_0$ و $x = x_1$ ، $y = y_1$ أي حلين فإن $x = x_0 + x_1$ و $y = y_0 + y_1$ أيضاً حل .

$$\begin{array}{ll} \text{(II)} & ax + by = 0 \\ & cx + dy = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & ax + by = k \\ & cx + dy = l \end{array}$$

(أ) بين أنه إذا كان $x = x_1$ ، $y = y_1$ ، $x = x_2$ ، $y = y_2$ حلين للنظام I فإن $x = x_1 - x_2$ ، $y = y_1 - y_2$ حل للنظام .

(ب) بين أنه إذا كان $x = x_1$ ، $y = y_1$ حل للنظام I وكان $x = x_0$ ، $y = y_0$ حلاً للنظام II فإن $x = x_1 + x_0$ ، $y = y_1 + y_0$ حل للنظام I .

١٠ - (أ) في نظام المعادلات الخطية المرقم (1.4) ، بين أنه يكون من الخطأ لرمز إلى المتغيرات المتقدمة بالرموز x_1 ، x_2 ، ... ، x_r ، بدلا من x_{k_1} ، x_{k_2} ، ... ، x_{k_r} كما فعلنا من قبل .

(ب) نظام المعادلات المرقم (1.3) حالة خاصة من (1.4) ماقية r في هذه الحالة ؟ ماذا تكون x_{k_1} ، x_{k_2} ، ... ، x_{k_r} في هذه الحالة ؟ أكتب المجاميع التي رمزنا لها بالرمز Σ () في (1.4) .

١ - ٤ المصفوفات والعمليات عليها

تظهر الترتيبية المستطيلة للأعداد الحقيقية في مقامات كثيرة غير تلك التي تظهر فيها كمصفوفات ممتدة . لأنظمة معادلات خطية . في هذا القسم تعتبر مثل هذه الترتيبات أشياء قائمة بذاتها وننشئ بعض خواصها للاستفادة بها في عملنا القادم .

تعريف : المصفوفة هي ترتيبية مستطيلة للأعداد . والأعداد في الترتيبية تسمى عناصر المصفوفة .

مثال (٩) :

تعتبر التكوينات التالية مصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3] \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [4]$$

تبين هذه الأمثلة أن المصفوفات تختلف في نوعها . يوصف نوع المصفوفة بذكر عدد الصفوف (الخطوط الأفقية) والأعمدة (الخطوط الرأسية) التي توجد في المصفوفة . المصفوفة اليسرى في مثال ٩ ثلاثة صفوف وعمودان ، وبالتالي تكون من النوع 2×3 . يشير العدد الأيسر دائماً إلى عدد الصفوف والعدد الأيمن يشير إلى عدد الأعمدة . المصفوفات المتبقية في مثال ٩ تكون من الأنواع 4×1 ، 3×3 ، 1×3 ، 2×1 ، 1×1 وذلك بالتتابع من اليسار . سوف نستخدم الحروف الكبيرة (A ، B ، ... ، مثلاً) لرمز للمصفوفات ، ونستخدم الحروف الصغيرة لرمز المقادير العددية . فقد نكتب

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

من الشائع عند دراسة المصفوفات الإشارة إلى المقادير العددية بأنها أعداد قياسية . في هذا النص ستكون كل أعدادنا القياسية أعداداً حقيقية .

إذا كانت A مصفوفة فنستخدم a_{ij} لرمز إلى العنصر الذي في الصف i والعمود j للمصفوفة A .
وعلى ذلك يمكن كتابة المصفوفة العامة من النوع 3×4 على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

من الطبعي إذا استخدمنا B لرمز للمصفوفة فإننا نستخدم b_{ij} للعنصر في الصف i والعمود j .
وعلى ذلك يمكن كتابة المصفوفة العامة من النوع $m \times n$ على الصورة .

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A التي بها n من الصفوف ، n من الأعمدة هي مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$ والعناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ يقال إنها على القطر الرئيسي للمصفوفة A (انظر شكل ١ - ٢) .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{شكل ١ - ٢})$$

لقد استخدمنا المصفوفات فيما سبق لاختصار العمل في حل أنظمة المعادلات الخطية . لكن لأجل تطبيقات أخرى يكون من المرغوب فيه أن ننشئ « حساباً للمصفوفات » فيه يمكن إضافة وضرب المصفوفات بطريقة مفيدة . الجزء المتبقى من هذا القسم سيخصص لإنشاء هذا الحساب .

تسمى المصفوفتان متساويتان إذا كانتا من نفس النوع وتساوت العناصر المتناظرة في المصفوفتين .

مثال (١٠) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا $A \neq C$ حيث إن A و C ليستا من نفس النوع ، لنفس السبب $B \neq C$. أيضاً $A \neq B$ حيث أن ليست كل العناصر المتناظرة متساوية .

تعريف : إذا كانت المصفوفتان A و B من نوع واحد ، فيكون المجموع $A + B$ هو المصفوفة التي نحصل عليها بجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين . لا يمكن جمع مصفوفتين من نوعين مختلفين .

مثال (١١) :

باعتبار المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

في حين يكون كل من $A + C$ ، $B + C$ غير معرف .

تعريف : إذا كانت A أى مصفوفة وكان c أى عدد قياسي فيكون حاصل ضرب cA هو المصفوفة الناتجة بضرب كل عنصر المصفوفة A في c .

مثال (١٢) :

إذا كانت A هي المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (-1)A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا كانت B أى مصفوفة ، فإن $-B$ - سيمز لحاصل ضرب B (-1) .

إذا كانت المصفوفتان A ، B من نوع واحد فتعرف المصفوفة $A - B$ على أنها المجموع $A + (-B) = A + (-1)B$.

مثال (١٣) :

اعتبر المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

من التعاريف السابقة ينتج أن

$$-B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $A - B$ يمكن الحصول عليها مباشرة بطرح عناصر B من العناصر المناظرة للمصفوفة A .

عرفنا فيما سبق ، ضرب مصفوفة في عدد قياسي . والسؤال الثاني إذن هو كيف نضرب مصفوفتين في بعضهما ؟ ربما يبدو من الطبيعي جداً أن يكون التعريف هو . . « اضرب العناصر المناظرة في بعضها » مما يثير الدهشة أن هذا التعريف لن يكون مفيداً في أغلب المسائل . وقد قادت التجربة الرياضيين إلى التعريف التالي لضرب المصفوفات وهذا التعريف أقل بداهة لكنه ذا فائدة أكبر .

تعريف : إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times r$ و B مصفوفة من النوع $r \times n$ فيكون حاصل الضرب AB هو المصفوفة من النوع $m \times n$ والتي تحدد عناصرها كما يلي :

لإيجاد العنصر في الصف i والعمود j للمصفوفة AB ، استخرج على حدة كلا من الصف i من المصفوفة A والعمود j من المصفوفة B . اضرب العناصر المناظرة من الصف والعمود في بعضها ثم اجمع حواصل الضرب الناتجة .

مثال (١٤) :

اعتبر المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

بما أن A مصفوفة من النوع 2×3 و B مصفوفة من النوع 3×4 فيكون حاصل الضرب AB مصفوفة من النوع 2×4 على سبيل المثال لتمييز العنصر في الصف الثاني والعمود الثالث للمصفوفة AB ، نستخرج على حدة الصف الثاني من A والعمود الثالث من B ، ثم نضرب كما أوضحنا ، العناصر المناظرة في بعضها ونجمع حواصل الضرب الناتجة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

يحسب العنصر في الصف الأول والعمود الرابع المصفوفة AB كما يلي :

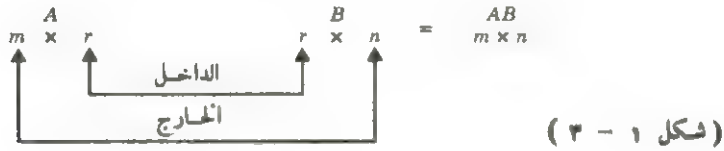
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & 13 \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

وتكون الحسابات للعناصر المتبقية هي

$$\begin{aligned} (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) &= 12 \\ (1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) &= 27 \\ (1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) &= 30 \\ (2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) &= 8 \\ (2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) &= -4 \\ (2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) &= 12 \end{aligned} \quad AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

يتطلب تعريف ضرب مصفوفتين أن يكون عدد أعمدة العامل الأيسر A هو نفس عدد صفوف العامل الأيمن B لكي يتشكل حاصل الضرب AB . إذا لم يتحقق هذا الشرط فلن يعرف حاصل الضرب . وطريقة ملائمة لتحديد ما إذا كان ضرب مصفوفتين معرفاً أم لا هي الطريقة التالية . نكتب نوع العامل الأيسر وعلى يمينه نكتب نوع العمل الأيمن . إذا كان العددين الداخليين متساويين ، كما في شكل ١ - ٣ ، فيكون الضرب معرفاً ، والعددين الخارجيين يعطيان نوع حاصل الضرب .



مثال (١٥) :

افترض أن A مصفوفة من النوع 3×4 ، B مصفوفة من النوع 4×7 ، C مصفوفة من النوع 7×3 فيعرف حاصل الضرب AB ويكون مصفوفة من النوع 3×7 ، ويعرف CA ويكون مصفوفة من النوع 7×4 ويعرف BC ويكون مصفوفة من النوع 4×3 حواصل الضرب AC ، CB ، BA غير معروفة .

مثال (١٦) :

إذا كانت A مصفوفة عامة من النوع $m \times r$ و B مصفوفة عامة من النوع $r \times n$ فإن العنصر في الصف i والعمود j كما يتبين من التظليل أدناه يعطى بالصيغة

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

لضرب المصفوفات تطبيق هام على أنظمة المعادلات الخطية . اعتبر أى نظام لعدد m من المعادلات الخطية في n مجهولا .

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث إن أى مصفوفتين تكونان متساويتين إذا وفقط إذا كانت العناصر المتناظرة متساوية فيمكننا

إبدال المعادلات ذات العدد m في هذا النظام بمعادلة مصفوفات واحدة

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

المصفوفة من النوع $m \times 1$ التي في الطرف الأيسر لهذه المعادلة يمكن كتابتها كحاصل ضرب لتعطى

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

إذا ميزنا هذه المصفوفات بالرموز A ، X ، B على الترتيب فإن النظام الأصلي لعدد m من

المعادلات في n من المجهول يكون قد استبدل بمعادلة المصفوفات الواحدة .

$$AX = B \quad (1.5)$$

سنخصص جزءا من عملنا القادم لحل معادلات المصفوفات مثل هذه للحصول على مصفوفة المجهول X .

نتيجة لهذا الاتجاه في المصفوفات ، سنحصل على طريقة جديدة ومجدية لحل أنظمة المعادلات الخطية . تسمى

المصفوفة A في 1.5 مصفوفة المعاملات للنظام .

مثال (۱۷) :

في بعض الأوقات يكون من المفيد أن نكون قادرين على إيجاد صف أو عمود معينين في حاصل ضرب AB دون حساب حاصل الضرب بأكمله . سوف نترك ذلك كسألة لتوضيح أن عناصر العمود j من AB هي حاصل الضرب AB_j ، حيث B_j هي المصفوفة المكونة من العمود j فقط للمصفوفة B على ذلك إذا كانت A و B المصفوفتين في مثال ١٤ ، فيمكن الحصول على العمود الثاني من AB بواسطة الحساب

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

بالمثل فنأخذ الصف i من AB هي عناصر حاصل الضرب $A_i B$ ، حيث A_i هي الصفوفة المكونة من الصف i فقط للصفوفة A على ذلك يمكن الحصول على الصف الأول من حاصل الضرب AB في مثال ١٤ بواسطة الحساب

$$[1 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = [12 \ 27 \ 30 \ 13]$$

الصف الأول من A الصف الأول من AB

تہارین ۱ - ۴

١ - لتكن A ، B مصفوفتين من النوع 4×5 ولتكن C ، D ، E ، مصفوفات من النوع 5×2 ، 4×2 ، 5×4 على الترتيب حدد أيًا من عبارات المصفوفات التالية معروفة . بالنسبة للمعرفات منها أوجد نوع المصفوفة الناتجة :

$$\begin{array}{llll} AE + B & (\gamma) & AC + D & (\gamma) & BA & (1) \\ E(AC) & (2) & E(A + B) & (\wedge) & AB + B & (2) \end{array}$$

٢ - (١) أثبت أنه إذا كانت AB ، BA معرفتين فإن AB ، BA مصفوفتان مربعتان .

(ب) أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ وكانت $A(BA)$ معرفة فإن B مصفوفة من النوع $n \times m$.

٣ - حل معادلة المصفوفات الآتية لإيجاد d, c, b, a

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

٤ - اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب :

$$\begin{array}{lll} D - E & (\text{ج}) & D + E \quad (\text{ب}) \quad AB \quad (\text{أ}) \\ -7B & (\text{و}) & ED \quad (\text{هـ}) \quad DE \quad (\text{د}) \end{array}$$

٥ - باستخدام المصفوفات في تمرين ٤ ، احسب إذا أمكن

$$\begin{array}{lll} (3E)D & (\text{ب}) & 3C - D \quad (\text{أ}) \\ A(BC) & (\text{د}) & (AB)C \quad (\text{ج}) \\ (E^2 = EE \text{ حيث}) & D + E^2 \quad (\text{و}) & (4B)C + 2B \quad (\text{هـ}) \end{array}$$

٦ - بافتراض أن :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

استخدم الطريقة المبينة في مثال ١٧ لإيجاد

$$\begin{array}{lll} AB & (\text{ب}) \text{ الصف الثالث من} & AB \quad (\text{أ}) \text{ الصف الأول من} \\ BA & (\text{د}) \text{ العمود الأول من} & AB \quad (\text{ج}) \text{ العمود الثاني من} \\ AA & (\text{و}) \text{ العمود الثالث من} & AA \quad (\text{هـ}) \text{ الصف الثالث من} \end{array}$$

٧ - لتكن C ، D ، E المصفوفات التي في تمرين ٤ . استخدم أقل حسابات ممكنة لتحديد المنصر في الصف الثاني والعمود الثالث للمصفوفة $C(DE)$.

٨ - (أ) أثبت أنه إذا وجد بالمصفوفة A صف من الأصفار وكانت B أى مصفوفة نعرف لها حاصل الضرب AB ، فيوجد بالمصفوفة AB صف من الأصفار .
(ب) أوجد نتيجة مماثلة تشمل عموداً من الأصفار .

٩ - لتكن A أى مصفوفة من النوع $m \times n$ ولتكن O المصفوفة من النوع $m \times n$ التي جميع عناصرها أصفار . أثبت إذا كانت $kA = O$ فإن $k = 0$ أو $A = O$

١٠ - لتكن I المصفوفة من النوع $n \times n$ التي عناصرها في الصف i والعمود j كما يلي :

$$\begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

أثبت أن $AI = IA = A$ لأي مصفوفة A من النوع $n \times n$.

١١ - المصفوفة المربعة تسمى مصفوفة قطرية إذا كانت كل العناصر أصفاراً عدا عناصر القطر الرئيسى .
أثبت أن حاصل ضرب مصفوفتين قطريتين هو أيضاً مصفوفة قطرية . ضع قاعدة لضرب المصفوفات القطرية .

١٢ - (أ) أثبت أن عناصر العمود j من المصفوفة AB هي عناصر حاصل الضرب AB_j حيث B_j هي المصفوفة المكونة من العمود j للمصفوفة B .

(ب) أثبت أن عناصر الصف i من المصفوفة AB هي عناصر حاصل الضرب $A_i B$ حيث A_i هي المصفوفة المكونة من الصف i للمصفوفة A .

١ - ٥ قواعد حساب المصفوفات

على الرغم من أن الكثير من قواعد الحساب للأعداد الحقيقية ينطبق أيضاً على المصفوفات فهناك بعض الاستثناءات . واحد من أهم الاستثناءات يحدث عند ضرب المصفوفات . بالنسبة لأي عددين حقيقيين a و b يكون دائماً $ab = ba$ غالباً ما تسمى هذه الخاصية بقانون الإبدال للضرب . بالنسبة للمصفوفات ليس من الضروري أن تتساوى AB و BA . يمكن أن يفشل حدوث التساوى لثلاثة أسباب . فثلاً يمكن أن تكون AB معرفة ، لكن BA لا تكون معرفة . تحدث هذه الحالة عندما تكون A مصفوفة من النوع 2×3 و B مصفوفة من النوع 3×4 يمكن أيضاً أن تكون AB و BA معرفتين لكن تكونان من نوعين مختلفين . يحدث هذا عندما تكون A مصفوفة من النوع 2×3 و B مصفوفة من النوع 3×2 أخيراً ، يوضح المثال التالي أنه من الممكن أن تكون $AB \neq BA$ رغم كون المصفوفتين AB و BA كليهما معرفتين وهما من نوع واحد .

مثال (١٨) :

اعتبر المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

الضرب يعطى

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

وإذن $AB \neq BA$

رغم عدم تحقق قانون الإبدال بالنسبة للضرب في حساب المصفوفات ، فإن كثيراً من قوانين الحساب المعروفة تتحقق للمصفوفات . نلخص في النظرية التالية عدداً من أكثر هذه القوانين أهمية كما نذكر أسماها .

نظرية ٧ : تتحقق القوانين التالية لحساب المصفوفات ، وذلك بفرض أن أنواع المصفوفات تكون بحيث يمكن إتمام العمليات المبينة .

(أ)	$A + B = B + A$	قانون الإبدال بالنسبة للجمع
(ب)	$A + (B + C) = (A + B) + C$	قانون الإدماج بالنسبة للجمع
(ج)	$A(BC) = (AB)C$	قانون الإدماج بالنسبة للضرب
(د)	$A(B + C) = AB + AC$	قانون التوزيع
(هـ)	$(B + C)A = BA + CA$	قانون التوزيع
(و)	$A(B - C) = AB - AC$	
(ز)	$(B - C)A = BA - CA$	
(ح)	$a(B + C) = aB + aC$	
(ط)	$a(B - C) = aB - aC$	
(ي)	$(a + b)C = aC + bC$	
(ك)	$(a - b)C = aC - bC$	
(ل)	$(ab)C = a(bC)$	
(م)	$a(BC) = (aB)C = B(aC)$	

تؤكد كل معادلة من المعادلات التي في النظرية على متساوية بين المصفوفات. لبرهنة أى من هذه المتساويات يلزم أن نثبت أن المصفوفة بالطرف الأيسر من نفس النوع مثل المصفوفة بالطرف الأيمن ، وأن العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوية . للتوضيح سنبرهن (ح) . ونعطى بمض البراهين المتبقية كسائل .

برهان (ح) : بما أن الطرف الأيسر يتضمن العملية $A + C$ ، فيجب أن تكون المصفوفتان B ، C من نوع واحد وليكن $m \times n$ وينتج من ذلك أن المصفوفتين $a(B + C)$ و $aB + aC$ تكونان من نفس هذا النوع .

ليكن l_{ij} عنصراً في مصفوفة الطرف الأيسر وليكن r_{ij} العنصر المناظر في مصفوفة الطرف الأيمن . لإتمام البرهان يجب إثبات أن $l_{ij} = r_{ij}$ إذا فرضنا أن a_{ij} ، b_{ij} ، c_{ij} عناصر في الصف i والعمود j للمصفوفات A ، B ، C على الترتيب . فينتج من تعاريف عمليات المصفوفات أن

$$l_{ij} = a(b_{ij} + c_{ij}) \quad \text{و} \quad r_{ij} = ab_{ij} + ac_{ij}$$

بما أن $a(b_{ij} + c_{ij}) = ab_{ij} + ac_{ij}$ فنحصل على $l_{ij} = r_{ij}$ ويتم ذلك البرهان .

برغم أن علينا جميع المصفوفات وضرب المصفوفات قد عرفنا لأزواج من المصفوفات ، فإن قانوني الإدماج (ب) و (ج) يتيحان لنا أن نرمز إلى نواتج الجمع وحواصل الضرب لثلاث مصفوفات بالرمزين $A + B + C$ و ABC دون إدخال أى أقواس . ويبرر ذلك أنه مهما كانت كيفية إدخال الأقواس فقانونا الإدماج يضمنان الحصول على نفس النتيجة النهائية . بدون الدخول في التفاصيل ، يمكننا ملاحظة تحقق نتائج مماثلة بالنسبة إلى نواتج الجمع والضرب المتضمنة أربع مصفوفات أو أكثر . بصفة عامة ، إذا أعطينا أى حاصل جمع أو حاصل ضرب للمصفوفات فيمكن إدخال أو حذف الأقواس في أى مكان بداخل العبارة دون التأثير على النتيجة النهائية .

مثال (١٩) :

كشال توضيحي لقانون الإدماج بالنسبة لضرب المصفوفات ، اعتبر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فيكون

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إذاً

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ومن ناحية أخرى

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

وإذاً

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن $(AB)C = A(BC)$ كما تكفل نظرية ٢ (٣)

تسمى بمصفوفة صفرية المصفوفة التي كل عناصرها أصفار ، مثل

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

يسمى المصفوفات الصفرية بالرمز O ، وإذا كان من المهم التنبه عن النوع فنكتب $O_{m \times n}$

المصفوفة الصفرية من النوع $m \times n$.

إذا كانت A أى مصفوفة و O المصفوفة الصفرية من نفس النوع فن الواضح أن $A + O = A$

تلعب المصفوفة الصفرية في هذه المعادلة المصفوفات نفس الدور الذي يلعبه العدد 0 في المعادلة العددية $a + 0 = a$.

حيث أننا نعلم بالفعل أن بعض قواعد الحساب للأعداد الحقيقية لا تطبق على حساب المصفوفات ،

فيكون من التهور افتراض أن كل خواص صفر الأعداد الحقيقية تطبق على صفر المصفوفات . على سبيل

المثال ، اعتبر النتيجة المتعادتين في حساب الأعداد الحقيقية

١ - إذا كانت $ab = ac$ ، $a \neq 0$ فإن $b = c$ (يسمى هذا بقانون الحذف) .

٢ - إذا كانت $ad = 0$ فيكون أحد العاملين في اليسار مساوياً للصفر .

كما يوضح المثال التالي ، تكون النتيجةان المناظرتان خاطئتين في حساب المصفوفات .

مثال (٢٠) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا نجد أن

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

ورغم أن $A \neq 0$ ، فيكون من غير الصحيح شطب A على كلا الطرفين للمعادلة $AB = AC$ وكتابة $B = C$. وإذا لا ينطبق قانون الحذف على حساب المصفوفات .

أيضاً $AD = 0$ ، مع ذلك $A \neq 0$ و $D \neq 0$ فالنتيجة (٢) المدونة أعلاه لا تنطبق على حساب المصفوفات .

بالرغم من هذه الأمثلة السلبية ، فينطبق عدد من الخواص المعروفة للعدد الحقيقي 0 على المصفوفات الصفرية . وتتلخص في النظرية التالية بعض من أهم هذه الخواص .

البراهين متروكة كتمارين .

نظرية ٣ : القواعد التالية لحساب المصفوفات صحيحة ، بافتراض أن أنواع المصفوفات تكون بحيث يمكن إتمام العمليات المشار إليها .

$$A + 0 = 0 + A = A \quad (أ)$$

$$A - A = 0 \quad (ب)$$

$$0 - A = -A \quad (ج)$$

$$A0 = 0; \quad 0A = 0 \quad (د)$$

كتطبيق لنتائجنا في حساب المصفوفات ، تبرز النظرية التالية ، والتي بادرناسها مبكراً في النص .

نظرية ٤ : يوجد لكل نظام من أنظمة المعادلات الخطية إما عدد لانهاى من الحلول أو حل واحد بالضبط أو لا يوجد له أى حل .

البرهان : إذا كان $AX = B$ نظاماً من المعادلات الخطية فيكون واحد بالضبط من الآتي صحيحاً :
 (أ) لا يوجد للنظام أي حل ، (ب) يوجد للنظام حل واحد بالضبط ، (ج) يوجد للنظام أكثر من حل واحد . سيكون البرهان كاملاً إذا استعملنا إثبات وجود عدد لا نهائى من الحلول للنظام في الحالة (ج) .

افترض أن $AX = B$ لها أكثر من حل ، ليكن X_1 ، X_2 حلين مختلفين وعليه فإن $AX_1 = B$ ، $AX_2 = B$ بطرح هاتين المعادلتين نحصل على $AX_1 - AX_2 = 0$ أو $A(X_1 - X_2) = 0$ إذا افترضنا أن $X_0 = X_1 - X_2$ وأن k أى عدد قياس ، فإن

$$\begin{aligned} A(X_1 + kX_0) &= AX_1 + A(kX_0) \\ &= AX_1 + k(AX_0) \\ &= B + k0 \\ &= B + 0 \\ &= B \end{aligned}$$

ولكن هذا ينص على أن $X_1 + kX_0$ حل للمعادلة $AX = B$ بما أنه يوجد عدد لا نهائى من الاختيارات للعدد القياسى k ، فيوجد للنظام $AX = B$ عدد لا نهائى من الحلول .

تعتبر ذات أهمية خاصة المصفوفات المربعة مع أحاد في القطر الرئيسى وأصفار في غير القطر الرئيسى ،
 مثل

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{etc.}$$

كل مصفوفة من أمثال هذه المصفوفات تسمى مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز I وإذا كان من المهم تأكيد النوع ، سنكتب I_n لمصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$.

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن $AI_n = A$ و $I_m A = A$ كما هو موضح في المثال التالى . وعليه تلعب مصفوفة الوحدة في حساب المصفوفات نفس دور العدد 1 في العلاقات العددية $1 \cdot a = a$ و $a \cdot 1 = a$.

مثال (٢١) :

اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

فيكون حينئذ

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

إذا كانت A مصفوفة مربعة ، وكان من الممكن إيجاد مصفوفة B بحيث يكون $AB = BA = I$ فيقال إن A قابلة للانعكاس وتسمى B مصفوفة عكسية (مكروس) المصفوفة A .

مثال (٢٢) :

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة عكسية المصفوفة} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

مثال (٢٣) :

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

غير قابلة للانعكاس . لمعرفة السبب ، افترض أن

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

مصفوفة ما من النوع 3×3 . من مثال ١٧ العمود الثالث المصفوفة BA هو

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من المتعلق أن نسأل عن إمكانية وجود أكثر من معكوس واحد لمصفوفة قابلة للانعكاس . توضع النظرية الآتية أن الإجابة بالنفي ، فالمصفوفة القابلة للانعكاس يكون لها معكوس واحد .

نظرية ٥ : إذا كانت B و C معكوسين للمصفوفة A فإن $B = C$.

البرهان : حيث إن B معكوس للمصفوفة A فإن $BA = I$. ضرب الطرفين من اليمين في المصفوفة C يعطي $(BA)C = I C = C$ ولكن $(BA)C = B(AC) = BI = B$ إذن $B = C$.

تجاً لهذه النتيجة الهامة ، يمكننا الآن أن نتكلم عن « A » معكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس . إذا كانت A قابلة للانعكاس ، فسيمز لمعكوسها بالرمز A^{-1} وعليه فإن

$$AA^{-1} = I \quad \text{و} \quad A^{-1}A = I$$

المعكوس للمصفوفة A يلعب نفس الدور في حساب المصفوفات التي يلعبها المقلوب a^{-1} في العلاقات العددية $aa^{-1} = 1$ و $a^{-1}a = 1$

مثال (٢٤) :

اعتبر المصفوفة من النوع 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذا كانت $ad - bc \neq 0$ فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

إذ أن $AA^{-1} = I_2$ و $A^{-1}A = I_2$ (تحقق من ذلك) سنين في القسم التالي كيف يمكن إيجاد المعكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس من نوع يختلف من 2×2

نظرية ٦ : إذا كانت A و B قابليتين للانعكاس ومن نفس النوع ، فإن

(أ) AB قابلة للانعكاس

(ب) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

البرهان : إذا أمكننا أن نثبت أن $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ فسنكون قد أثبتنا

في نفس الوقت أن AB قابلة للانعكاس وأن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ولكن

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

وبالمثل فإن $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

رغم أننا سوف لانعطي البرهان لهذه النتيجة يمكن أن تمتد لتشمل ثلاثة أو أكثر من العوامل . عليه يمكننا أن نقرر النتيجة العامة التالية .

حاصل ضرب المصفوفات القابلة للانعكاس يكون دائماً قابلاً للانعكاس ، ومعكوس حاصل الضرب هو حاصل ضرب المعكوسات في ترتيب عكسي .

مثال (٢٥) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

بتطبيق الصيغة المخطاة في مثال ٢٤ ، نحصل على

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

وأيضاً

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

وإذن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ كما هو مكفول من نظرية (٦) .

إذا كانت A مصفوفة مربعة و n عدد موجب ، فإننا نعرف

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_n \text{ من العوامل}$$

$$A^0 = I$$

بالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت A قابلة للانعكاس ، فإننا نعرف

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n \text{ من العوامل}}$$

نظرية ٧ : إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس فإن :

$$(A^{-1})^{-1} = A \text{ و } A^{-1} \text{ قابلة للانعكاس}$$

$$(ب) \quad A^n \text{ قابلة للانعكاس ؛ } (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \text{ لقيم } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(ج) \quad \text{لأي عدد } k \text{ قياسي وغير صفري ، } kA \text{ قابلة للانعكاس و } (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

البرهان :

$$(أ) \quad \text{حيث إن } AA^{-1} = A^{-1}A = I \text{ ، فتكون } A^{-1} \text{ قابلة للانعكاس و } (A^{-1})^{-1} = A .$$

(ب) هذا الجزء متروك كتمرين .

$$(ج) \quad \text{إذا كان } k \text{ أي عدد قياسي غير صفري ، فإن النتائج (ل) ، (م) بنظرية ٢ تسمح لنا بأن نكتب .}$$

$$(kA) \left(\frac{1}{k} A^{-1} \right) = \frac{1}{k} (kA) A^{-1} = \left(\frac{1}{k} k \right) AA^{-1} = (1)I = I$$

$$\text{وبالمثل } \left(\frac{1}{k} A^{-1} \right) (kA) = I \text{ ، إذن } kA \text{ قابلة للانعكاس و } (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

ونهى هذا القسم بملاحظة أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة و كان r و s عددين صحيحين ، فإن القوانين المألوفة التالية للأسس تكون صحيحة

$$A^r A^s = A^{r+s} \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

البراهين متروكة كتمارين .

تمارين ١ - ٥

١ - لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad a = -3 \quad b = 2$$

أثبت أن :

$$(AB)C = A(BC) \quad (ب)$$

$$a(B - C) = aB - aC \quad (د)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (أ)$$

$$(a + b)C = aC + bC \quad (ج)$$

٢ - باستخدام المصفوفات والأعداد القياسية في تمرين ١ ، أثبت أن

$$a(BC) = (aB)C = B(aC) \quad (أ)$$

$$A(B - C) = AB - AC \quad (ب)$$

٣ - استخدم الصيغة المطاة في مثال ٢٤ لحساب المعكوس لكل من المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

٤ - تحقق من أن المصفوفتين A و B في تمرين ٣ تحقق العلاقة $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

٥ - لتكن A و B مصفوفتين مربعيتين من نفس النوع ، هل $(AB)^2 = A^2 B^2$ متطابقة مصفوفات صحيحة ؟ برر إجابتك .

٦ - لتكن A مصفوفة قابلة للانعكاس ومكوسها هو

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة A .

٧ - لتكن A مصفوفة قابلة للانعكاس ، بفرض أن معكوس $7A$ هو

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة A .

٨ - لتكن A هي المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب A^3 ، A^{-3} ، $A^2 - 2A + I$.

٩ - لتكن A هي المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حدد هل A قابلة للانعكاس ، وإذا كانت كذلك ، أوجد معكوسها .

(إرشاد : حل $AX = I$ بمساواة العناصر المناظرة في الطرفين) .

١٠ - أوجد معكوس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

١١- (أ) أوجد مصفوفتين A و B من النوع 2×2 بحيث يكون

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

(ب) أثبت أنه إذا كان A ، B مصفوفتين مربعيتين بحيث كان $AB = BA$ فإن .

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

(ج) أوجد مفكوكاً للمصفوفة $(A + B)^2$ بحيث يكون متحققاً لكل المصفوفات A ، B التي من نوع واحد .

١٢- اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث $a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$ أثبت أن A قابلة للانعكاس وأوجد معكوسها .

١٣- افترض أن A مصفوفة مربعة تحقق $A^2 - 3A + I = 0$. أثبت أن $A^{-1} = 3I - A$.

١٤- (أ) أثبت أنه لا يمكن أن يوجد معكوس لأي مصفوفة ذات صف من الأصفار .

(ب) أثبت أنه لا يمكن أن يوجد معكوس لأي مصفوفة ذات عمود من الأصفار .

١٥- هل من اللازم أن يكون حاصل جمع مصفوفتين قابلتين للانعكاس قابلاً للانعكاس ؟

١٦- لتكن A و B مصفوفتين مربعيتين بحيث يكون $AB = 0$. أثبت أن A لا يمكن أن تكون قابلة للانعكاس ما لم تكن $B = 0$.

١٧- لماذا لم نكتب الجزء (د) من نظرية ٣ كالتالي $AO = 0 = OA$ ؟

١٨- للمعادلة العددية $a^2 = 1$ حلان بالضبط . أوجد على الأقل ثمانى مصفوفات مختلفة من النوع 3×3 بحيث تحقق هذه المصفوفات المعادلة $A^2 = I_3$

(اوهساد : ابحث عن الحلول التي فيها كل العناصر في غير القطر الرئيسى تكون أصفاراً) .

١٩- ليكن $AX = B$ نظاماً متألفاً من المعادلات الخطية ، وليكن X_1 حلاً مشتبهاً . أثبت أن كل حل للنظام يمكن أن يكتب على الصورة $X = X_1 + X_0$ حيث X_0 حل للنظام $AX = 0$. أثبت أيضاً أن كل مصفوفة بهذا الشكل تكون حلاً .

٢٠- طبق الجزأين (د) ، (م) من نظرية ٢ على المصفوفات A ، B و C (-1) لتشتق النتيجة التي في الجزء (و) .

٢١- برهن الجزء (ب) من نظرية ٢ .

٢٢ - برهن نظرية ٣ .

٢٣ - برهن الجزء (ج) من نظرية ٢ .

٢٤ - برهن الجزء (ج) من نظرية ٧ .

٢٥ - آخذاً في الاعتبار قوانين الأسس $A^r A^s = A^{r+s}$ و $(A^r)^s = A^{rs}$ ؛

(أ) أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن هذه القوانين تكون صحيحة لكل القيم الصحيحة غير السالبة للأعداد r, s .

(ب) أثبت أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس ، فإن هذه القوانين تنطبق على كل القيم الصحيحة السالبة للأعداد r, s .

٢٦ - أثبت أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس و كان k أى عدد قياسى غير صفري ، فإن $(kA)^n = k^n A^n$ لكل القيم الصحيحة للعدد n .

٢٧ - (أ) أثبت أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس و كان $AB = AC$ فإن $B = C$.
(ب) إشرح لماذا لا يتناقض الجزء (أ) من هذه المسألة مع مثال ٢٠ .

١ - ٦ المصفوفات البسيطة وطريقة لإيجاد A^{-1}

سندرس في هذا القسم طريقة عملية بسيطة لإيجاد المكسوس لمصفوفة قابلة للانعكاس .

تعريف : أى مصفوفة من النوع $n \times n$ تسمى مصفوفة بسيطة إذا أمكن الحصول عليها من مصفوفة الوحدة I_n من النوع $n \times n$ بإجراء عملية بسيطة (أولية) واحدة على الصفوف .

مثال (٢٦) :

مدرج أدناه أربع مصفوفات بسيطة والعمليات التي أوجدتها

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (٤)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (٣)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (٢)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (١)
أخرب الصف الأول من I_3 في العدد 1	أضف ثلاثة أمثال الصف الثالث من I_3 إلى الصف الأول	أبدل الصفين الثاني والرابع من I_4	أخرب الصف الثاني من I_2 في -3

عندما تضرب مصفوفة A من اليسار بمصفوفة بسيطة E يكون التأثير هو إجراء عملية بسيطة على صفوف المصفوفة A . هذا هو محتوى النظرية التالية التي نذكرها بدون برهان .

نظرية ٨ : إذا نتجت المصفوفة البسيطة E بإجراء عملية معينة على صفوف I_m وإذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فيكون حاصل الضرب EA هو المصفوفة الناتجة بإجراء نفس العملية على صفوف A .
يوضح المثال التالي هذه الفكرة :

مثال (٢٧) :

اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

واعتبر المصفوفة البسيطة

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

التي تنتج من إضافة ثلاثة أمثال الصف الأول من I_3 إلى الصف الثالث . حاصل الضرب EA هو

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

وهو بالضبط المصفوفة التي نحصل عليها بإضافة ثلاثة أمثال الصف الأول من A إلى الصف الثالث .

ملحوظة : نظرية (٨) ، أولاً وقبل كل شيء ، لها أهمية خاصة من الناحية النظرية ، وستستخدم في الحصول على بعض النتائج عن المصفوفات وأنظمة المعادلات الخطية . من وجهة النظر الحسابية ، يفضل إجراء عمليات على الصفوف مباشرة عن الضرب من اليسار بمصفوفة بسيطة .

إذا أجريت عملية بسيطة على صفوف مصفوفة وحدة I للحصول على مصفوفة بسيطة E فإنه توجد عملية أخرى على الصفوف عند إجرائها على E نحصل على I مرة أخرى . على سبيل المثال ، إذا حصلنا على E بضرب الصف i من I في ثابت غير صفري c فيمكن إعادة I بضرب الصف i من E في $1/c$. الإمكانات المختلفة مدرجة في شكل (٤ - ١) .

العمليات على صفوف I التي تنتج E	العمليات على صفوف E التي تنتج I
اضرب الصف i في $1/c$	اضرب الصف i في c ، حيث $c \neq 0$
ابدل الصفين i و j	ابدل الصفين i و j
أضف إلى الصف j حاصل ضرب الصف i في $-c$	أضف إلى الصف j حاصل ضرب الصف i في c

(شكل ٤ - ١)

العمليات في الطرف الأيسر لهذا الجدول تسمى عمليات عكسية العمليات المناظرة في الطرف الأيمن .

مثال (٢٨) :

باستخدام النتائج بشكل ١ - ٤ ، يمكن إرجاع الثلاثة الأول من المصفوفات البسيطة المعطاة في مثال ٢٦ إلى مصفوفات وحدة بتطبيق العمليات التالية على المصفوفات : ضرب الصف الثاني من (١) في $1/3 -$ ؛ ابدل الصفين الثاني والرابع من (٢) ، أضف إلى الصف الأول من (٣) حاصل ضرب الصف الثالث في ٣ - .
تعطى النظرية التالية خاصية هامة للمصفوفات البسيطة

نظرية ٩ : جميع المصفوفات البسيطة قابلة للانعكاس ، ومكوساتها مصفوفات بسيطة أيضاً .

البرهان : إذا كانت E مصفوفة بسيطة ، فن الملاحظات السابقة يمكن الحصول على I من E بإجراء عملية بسيطة واحدة على صفوف E . لتكن E_0 المصفوفة البسيطة التي نحصل عليها بإجراء هذه العملية على صفوف I بتطبيق نظرية (٨) ، نجد أن

$$E_0 E = I \quad (1.6)$$

لتكلم البرهان ، سنثبت أن

$$E E_0 = I$$

بما أن E_0 مصفوفة بسيطة ، فتوجد عملية بسيطة عند إجرائها على صفوف E_0 ، نحصل على I . لتكن E_1 هي تلك المصفوفة البسيطة التي نحصل عليها بإجراء هذه العملية على صفوف I بتطبيق نظرية (٨) مرة أخرى نحصل على

$$E_1 E_0 = I \quad (1.7)$$

ضرب كلا طرفي المعادلة 1.6 من اليسار في E_1 يعطى $E_1 E_0 E = E_1 I$ أى $E_1 E = E_1$ أى $E = E_1$ التعميم بالمصفوفة E بدلا من E_1 في المعادلة 1.7 يعطى $E E_0 = I$ ، بذلك يكتمل البرهان .

إذا أمكننا الحصول على المصفوفة B من المصفوفة A بإجراء متتابعة منتهية من عمليات بسيطة على الصفوف فواضح أنه يمكننا إعادة B إلى A بإجراء العمليات العكسية ، العمليات البسيطة السابقة ، على صفوف B ، بترتيب عكسي . المصفوفات التي يمكن الحصول عليها كل واحدة من الأخرى بواسطة متتابعة من العمليات البسيطة على الصفوف تسمى متكافئة صفياً . تعطينا النظرية الآتية بعض العلاقات الأساسية بين المصفوفات من النوع $n \times n$ والأنظمة لعدد n من المادلات الخطية في n من المجاهيل . هذه النتائج لها أهمية قصوى وسوف تستخدم العديد من المرات في الأقسام القادمة .

نظرية ١٠ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فالتقارير التالية تكون متكافئة ، بمعنى أن ،
كل التقارير صحيحة أو كلها خاطئة .
(أ) A قابلة للانعكاس .
(ب) $AX = 0$ لها الحل التافه فقط .
(ج) A متكافئة صفياً مع I_n .

البرهان : سنبرهن التكافؤ بإثبات السلسلة التالية من الاستنتاجات :

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a).$$

$(a) \Rightarrow (b)$ افترض أن A قابلة للعكس ولتكن X_0 أى حل للنظام $AX = 0$ أى إن $AX_0 = 0$

ضرب كلا طرفي هذه المعادلة في A^{-1} يعطى $A^{-1}(AX_0) = A^{-1} \cdot 0$ أى $(A^{-1}A)X_0 = 0$ أى $X_0 = 0$ وإذن $AX = 0$ لها الحل التافه فقط .

$(b) \Rightarrow (c)$: لتكن $AX = 0$ هي صيغة المصفوفات للنظام .

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

وافترض أن النظام له الحل التافه فقط . إذا أجرينا الحل بطريقة جاوس - جوردان للمصفوفة ، فإن نظام

المعادلات المناظر للصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة الممتدة هو

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

وإذن المصفوفة الممتدة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

لنظام (1.8) يمكن اختزالها إلى المصفوفة الممتدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لنظام (1.9) بواسطة متتابعة من العمليات البسيطة على الصفوف . إذا أغفلنا العمود الأخير (عمود الأصفار) في كلتا المصفوفتين . يمكننا أن نستخلص أنه يمكن اختزال A إلى I_n بواسطة متتابعة من العمليات البسيطة على الصفوف ، بمعنى آخر A متكافئة صفياً مع I_n .

(a) \Rightarrow (c) : افترض أن A متكافئة صفياً مع I_n إذن يمكن اختزال A إلى I_n بواسطة متتابعة منتهية من العمليات البسيطة على الصفوف . باستخدام نظرية (A) ، كل من هذه العمليات يمكن إنجازها بالضرب من اليسار في مصفوفة بسيطة مناسبة . وعليه يمكننا إيجاد مصفوفات بسيطة E_1, E_2, \dots, E_k بحيث تكون

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \quad (1.10)$$

باستخدام نظرية ٩ المصفوفات E_1, E_2, \dots, E_k قابلة للانعكاس ، بضرب كلا طرفي المعادلة

$$(1.10) \text{ من اليسار بالتتابع في } E_1^{-1}, E_2^{-1}, \dots, E_k^{-1} \text{ نحصل على}$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \quad (1.11)$$

بما أن (1.11) تعتبر عن A كحاصل ضرب مصفوفات قابلة للانعكاس ، فيمكننا أن نستخلص أن A قابلة للانعكاس .

ملحوظة : بما أن I_n في الصورة الصفية المميزة المختزلة وبما أن الصورة الصفية المميزة المختزلة لأي مصفوفة A وحيدة (فالجزء) (ج) من النظرية ١٠ يكافئ التقرير أن I_n هي الصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة A بمثابة أول تطبيقاتنا لهذه النظرية ستأسس طريقة لتحديد المكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس . بكتابة مكوس كل من طرفي (1.11) نحصل على $E_1 E_2 \cdots E_k = A^{-1}$ أو بصورة مكافئة

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I_n \quad (1.12)$$

وهذه تخبرنا أن A^{-1} يمكن الحصول عليها بضرب I_n بالتتابع من اليسار في المصفوفات البسيطة E_1, E_2, \dots, E_k حيث إن الضرب من اليسار في إحدى هذه المصفوفات البسيطة يجرى عملية على الصفوف فينتج بمقارنة المعادلتين (1.10) و (1.12) أن متتابعة العمليات على صفوف A التي تختزله إلى I_n ستختزل I_n إلى A^{-1} وعليه فلايجاد المكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس A . يجب أن نجد متتابعة من العمليات البسيطة على صفوف A تختزل A إلى مصفوفة الوحدة ثم نجرى نفس هذه المتتابعة من العمليات على I_n لنحصل على A^{-1} . تعطي في المثال التالي طريقة بسيطة لتنفيذ هذا الأسلوب .

مثال (٢٩) :

أوجد المصفوفة المكسية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

نرغب في اختزال A إلى مصفوفة الوحدة بواسطة عمليات بسيطة على الصفوف وفي نفس الوقت تطبيق هذه العمليات على I لتنتج A^{-1} يمكن أن يتم ذلك بإلحاق مصفوفة الوحدة إلى اليمين من A وتطبيق العمليات على صفوف كلا الطرفين حتى يختزل الطرف الأيسر إلى I ستكون المصفوفة النهائية على الصورة $[I A^{-1}]$.

يمكن إجراء الحسابات كالتالي :

طرحنا ضعف الصف الأول من الثاني وطرحنا الصف الأول من الثالث .

أضفنا ضعف الصف الثاني إلى الثالث

ضربنا الصف الثالث في -1 .

أضفنا ثلاثة أمثال الصف الثالث إلى الثاني وطرحنا ثلاثة أمثال الصف الثالث من الأول

طرحنا ضعف الصف الثاني من الأول

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

والآن

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

كثيراً ما لا يعرف مسبقاً هل المصفوفة المطاة قابلة للانعكاس أم لا . إذا أجريت المحاولة بالأسلوب المستخدم في هذا المثال على مصفوفة غير قابلة للانعكاس فاستخدام الجزء (ج) من نظرية ١٠ يكون من المستحيل اختزال الطرف الأيسر إلى I بواسطة عمليات على الصفوف . سيحدث عند مرحلة ما من مراحل الحساب أن يظهر صف من الأصفار في الطرف الأيسر . يمكننا أن نستخلص عندئذ أن المصفوفة المطاة غير قابلة للانعكاس ، ويمكن إيقاف الحساب

مثال (٣٠) :

اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

تطبيق أسلوب مثال (٢٩) يؤدي إلى

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

طرحنا ضعف الصف الاول
من الثاني واضفنا الصف
الاول الى الثالث

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

اضفنا الصف الثاني
الى الثالث

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

حيث إننا حصلنا على صف من الأصفار في الطرف الأيسر ، فتكون A غير قابلة للانعكاس .

مثال (٣١) :

لقد أثبتنا في مثال (٢٩) أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قابلة للانعكاس . يمكننا الآن أن نمتخلص من نظرية (١٠) أن نظام المعادلات

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 + 8x_3 = 0$$

له الحل التافه فقط

تمارين ١ - ٦

١ - أى من المصفوفات التالية تعتبر مصفوفات بسيطة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\Delta)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\Delta)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{و})$$

٢ - عين العملية التي تجري على صفوف المصفوفة البسيطة المعطاة لتعيدها إلى مصفوفة واحدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

٣ - اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفات بسيطة E_4 ، E_3 ، E_2 ، E_1 بحيث تكون

$$E_4 C = A \quad (\Delta) \quad E_3 A = C \quad (\text{ج}) \quad E_2 B = A \quad (\text{ب}) \quad E_1 A = B \quad (\text{أ})$$

٤ - هل من الممكن في تمرين ٣ أن نجد مصفوفة بسيطة E بحيث تكون $E B = C$ ؟ برر إجابتك .

في التمارين ٥ ، ٦ ، ٧ استخدم الطريقة الموضحة في مثال ٢٩ و ٣٠ لإيجاد المكروس للمصفوفة المعطاة

إذا كانت هذه المصفوفة قابلة للانكماش

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{أ}) - ٥$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{أ}) - ٦$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad (\text{و}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\Delta) \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{أ}) - ٧$$

٨ - أثبت أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قابلة للانعكاس لكل قيم θ وأوجد A^{-1}

٩ - اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفتين بسيطتين E_1 ، E_2 بحيث $E_2 E_1 A = I$

(ب) اكتب A^{-1} كحاصل ضرب مصفوفتين بسيطتين

(ج) اكتب A كحاصل ضرب مصفوفتين بسيطتين

١٠ - أجز العمليات الآتية على صفوف

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

بضرب A من اليسار بمصفوفة بسيطة مناسبة . حقق إجابتك في كل حالة بإجراء العملية على صفوف A مباشرة .

(أ) ابدل الصفين الأول والثالث .

(ب) اضرب الصف الثاني في $1/3$.

(ج) أضف ضعف الصف الثاني إلى الصف الأول .

١١ - عبر عن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

بالصورة $A = EFR$ ، حيث E ، F مصفوفتان بسيطتان و R في الصورة الصغية المميزة .

١٢ - أثبت أنه إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

مصفوفة بسيطة فإن أحد العناصر على الأقل بالصف الثالث يجب أن يكون صفراً .

١٣ - أوجد المكوس لكل من المصفوفات التالية من النوع 4×4 ، حيث k_1 ، k_2 ، k_3 ، k_4 و k جميعها غير صفرية

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

١٤ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإنه توجد مصفوفة قابلة للانعكاس C بحيث تكون CA في الصورة الصفية المميزة المختزلة .

١٥ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس وكانت B متكافئة صفياً مع A ، فإن B أيضاً قابلة للانعكاس .

٧ - ١ نتائج أخرى عن أنظمة المعادلات وقابلية الانعكاس

في هذا القسم سنؤسس مزيداً من النتائج عن أنظمة المعادلات الخطية وقابلية المصفوفات للانعكاس سيقودنا عملنا إلى طريقة لحل n من المعادلات في n من المجاهيل ، والتي ستكون ذات فاعلية أكثر من طريقة جاكوس للهدف لأنواع معينة من المسائل .

لظرية (١١) : إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس من النوع $n \times n$ ، فلكل مصفوفة B من النوع $n \times 1$ يكون نظام المعادلات $AX = B$ له حل واحد بالضبط وهو $X = A^{-1}B$.

البرهان : حيث إن $A(A^{-1}B) = B$ فإن $X = A^{-1}B$ حل للمعادلة $AX = B$. لإثبات أن هذا هو الحل الوحيد ، سنقرض أن X_0 حل اختياري ثم نثبت أن X_0 يجب أن يكون هو B الحل A^{-1} . إذا كانت X_0 أي حل ، فإن $AX_0 = B$. بضرب كلا الطرفين في A^{-1} نحصل على $X_0 = A^{-1}B$.

مثال (٢٢) :

اعتبر نظام المعادلات الخطية

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 8x_3 = 17$$

هذا النظام يمكن كتابته بصيغة المصفوفات على الصورة $AX = B$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

لقد أثبتنا في مثال (٢٩) أن A قابلة للانعكاس وأن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

باستخدام نظرية (١١) نجد أن حل النظام هو

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أى $x_3 = 2$ ، $x_2 = 1$ ، $x_1 = 1$

الأسلوب الموضح في هذا المثال يطبق فقط عندما تكون مصفوفة المعاملات A مربعة بمعنى آخر عندما يكون عدد المعادلات مساوياً لعدد المجهول . مع ذلك ، فكثير من المسائل في العلوم والهندسة يتضمن أنظمة من هذا النوع والطريقة مفيدة بصفة خاصة عندما يكون من الضروري حل سلسلة كاملة من الأنظمة

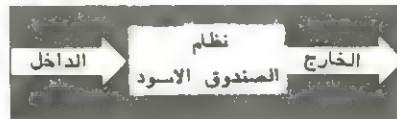
$$AX = B_1, AX = B_2, \dots, AX = B_k$$

التي لكل منها نفس مصفوفة المعاملات المربعة . في هذه الحالة ، الحلول

$$X = A^{-1}B_1, X = A^{-1}B_2, \dots, X = A^{-1}B_k$$

يمكن الحصول عليها باستخدام عملية إيجاد معكوس مصفوفة واحدة وعمليات ضرب المصفوفات عددها k فهذه الطريقة أكثر فعالية من تطبيق طريقة جاوس للحذف على كل نظام من الأنظمة k على حدة نستطرد خطأ في شرح كيف يمكن أن يظهر هذا الموقف في التطبيق في بعض مسائل تطبيقية معينة تعتبر الأنظمة الفيزيائية أنها التي يمكن وضعها بمثابة صناديق سوداء . يدل هذا المصطلح على أن النظام قد اختصر إلى عنصرية الجوهرين . يتخيل أى فرد ببساطة ، كما هو مبين في شكل ١ - ٥ أنه إذا أُمد النظام بدخل معين ، فينتج ناتج معين للنظام . وتكون الأعمال الداخلية للنظام إما غير معلومة أو غير مهمة للمسألة - ومن ثم المصطلح لصندوق أسود .

بالنسبة لكثير من أنظمة الصندوق الأسود المهمة ، يمكن تمثيل كل من الدخل والناتج ، كمصفوفات ذات عمود واحد . على سبيل المثال . إذا كان الصندوق الأسود مكوناً من دائرة إلكترونية معينة ، فيمكن أن يكون الدخل مصفوفة من النوع $1 \times n$ عناصرها n من قراءات الجهد الكهربى عبر طرفا دخل معينة ويمكن أن يكون الناتج مصفوفة من النوع $1 \times n$ عناصرها قراءات التيار الناتج في n من الأسلاك وبلغة الرياضيات



(شكل ١ - ٥)

مثل هذا النظام ليس إلا تحويل مصفوفة دخل من النوع $n \times 1$ إلى مصفوفة ناتج من النوع $n \times 1$ بالنسبة لقسم كبير من أنظمة الصندوق الأسود تكون مصفوفة الدخل C في علاقة مع مصفوفة الناتج بواسطة معادلة مصفوفات

$$AC = B$$

حيث A مصفوفة من النوع $n \times n$ عناصرها بارامترات فيزيائية يحددها النظام . يعتبر أى نظام من هذا النوع مثالا على مايسمى بالنظام الفيزيائي الخطي . غالباً مايكون مهما في التطبيق أن نحدد أى دخل يجب أن يمد به النظام لنحصل على ناتج مطلوب ونحدد بالنسبة لأى نظام فيزيائي خطي من النمط الذي أتممنا مناقشته الآن ، هذا يعادل حل معادلة $AX = B$ بالنسبة للدخل المجهول X ، ليحلى الناتج المطلوب B . وعليه إذا كان لدينا متوالية من مصفوفات ناتج مختلفة B_1, B_2, \dots, B_k ونريد تعيين مصفوفات الدخول التي تنتج النواتج المطلوبة ، يجب أن نحل بالتتابع أنظمة المعادلات الخطية

$$AX = B_j \quad j = 1, 2, \dots, k$$

ولكل نظام من هذه الأنظمة التي عددها k نفس مصفوفة المعاملات المربعة A . النظرية التالية تبسط مشكلة إثبات قابلية مصفوفة للانعكاس . حتى الآن ، لإثبات أن مصفوفة من النوع $n \times n$ قابلة للانعكاس ، كان من الضروري إيجاد مصفوفة B من النوع $n \times n$ بحيث يكون

$$AB = I \quad \text{و} \quad BA = I$$

ثبتت النظرية التالية أنه إذا أوجدنا مصفوفة B من النوع $n \times n$ تستوفي أحد الشرطين ، فإن الشرط الآخر يتحقق تلقائياً .

نظرية ١٢ : لتكن A مصفوفة مربعة

(أ) إذا كانت B مصفوفة مربعة وتحقق الشرط $BA = I$ ، فإن $B = A^{-1}$.

(ب) إذا كانت B مصفوفة مربعة وتحقق الشرط $AB = I$ ، فإن $B = A^{-1}$.

البرهان : سنبث (أ) ونترك (ب) كتدوين

(١) نفترض أن $BA = I$ إذا اسطلنا إثبات أن A قابلة للانعكاس ، فيمكن أن يكتمل البرهان بضرب طرفي $BA = I$ في A^{-1} لنحصل على $BAA^{-1} = IA^{-1}$ أى $BI = IA^{-1}$ أى $B = A^{-1}$. لإثبات أن A قابلة للانعكاس يكفي أن نثبت أن النظام $AX = 0$ له الحل التافه فقط (انظر نظرية ١٠) . إذا ضربنا طرفي $AX = 0$ من اليسار في B نحصل على $BAX = B0$ أى $IX = 0$ أى $X = 0$. إذن نظام المعادلات $AX = 0$ له الحل التافه فقط .

نحن الآن في موقف يسمح لنا بإضافة تقرير رابع مكافئ للثلاثة المطاة في نظرية (١٠) .

نظرية ١٣ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فإن التقارير الآتية متكافئة :

(أ) A قابلة للانعكاس .

(ب) $AX = 0$ لها الحل التافه فقط .

(ج) A متكافئة صفياً مع I_n .

(د) $AX = B$ متآلفة لكل مصفوفة B من النوع $n \times 1$.

البرهان : حيث إننا أثبتنا تكافؤ (أ) ، (ب) ، (ج) في نظرية (١٠) ، فيكفى أن نبرهن أن
(د) \Rightarrow (أ) ، (أ) \Rightarrow (د) .

(د) \Rightarrow (أ) : إذا كانت A قابلة للانعكاس وكانت B أى مصفوفة من النوع $n \times 1$ فإن $X = A^{-1}B$ حل للمعادلة $AX = B$ وذلك باستخدام نظرية (١١) . إذن النظام $AX = B$ متآلف .

(أ) \Rightarrow (د) : إذا كان النظام $AX = B$ متآلفاً لكل مصفوفة B من النوع $n \times 1$ فإنه على الأخص تكون النظم

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

متآلفة . لتكن X_1 حلاً للنظام الأول ، X_2 حلاً للنظام الثانى ، ... ، X_n حلاً للنظام الأخير ،
ودعنا نكون مصفوفة C من النوع $n \times n$ أعمدها هى هذه الحلول أى إن C على الصورة

$$C = [X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_n]$$

وفقاً للمناقشة في مثال (١٧) ، ستكون الأعمدة المتتالية لحاصل الضرب AC هى

$$AX_1, AX_2, \dots, AX_n$$

$$AC = [AX_1 \mid AX_2 \mid \dots \mid AX_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{وإذن}$$

باستخدام الجزء (ب) من نظرية (١٢) ينتج أن $C = A^{-1}$ إذن A قابلة للانعكاس .

في عملنا القادم سنكرر المسألة الأساسية التالية مرات ومرات في مقامات عديدة .

مسألة أساسية : لتكن A مصفوفة محددة من النوع $m \times n$. أوجد جميع المصفوفات B من النوع $m \times 1$ بحيث يكون نظام المعادلات $AX = B$ متآلفاً .

إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس . فتنظرية (١١) تحل هذه النظرية حلاً كاملاً بتأكيدنا على أن لكل مصفوفة B من النوع $m \times 1$ النظام $AX = B$ له الحل الوحيد $X = A^{-1}B$.

إذا كانت A غير مربعة ، أو إذا كانت A مربعة ولكنها غير قابلة للانعكاس ، فإن النظرية (١١) لا تنطبق . في هذه الحالة نود تعيين الشروط ، إن وجد شرط ، التي يجب أن تستوفيها المصفوفة B لكي يكون النظام $AX = B$ متآلفاً . يوضح المثال التالي كيف يمكن استخدام طريقة جاوس للهدف لتعيين مثل هذه الشروط .

مثال (٣٣) :

ماهي الشروط التي يجب أن تحقّقها b_1 ، b_2 ، b_3 لكي يكون نظام المعادلات

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_3 = b_2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3$$

متآلفاً ؟

الحل : المصفوفة الممتدة هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

ويمكن اخذها إلى الصورة الصفية المبززة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

يتضح الآن من الصف الثالث للمصفوفة أن النظام حلاً إذا وفقط إذا حققت b_1 ، b_2 ، b_3 الشرط $b_3 = b_1 + b_2$ أي $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

يمكن التعبير عن هذا الشرط بطريقة أخرى : النظام $AX = B$ يكون متآلفاً إذا وفقط إذا كانت B مصفوفة على الصورة

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

حيث b_1 ، b_2 اختياريان .

تمارين ١ - ٧

في التمارين من ١ إلى ٦ حل النظام باستخدام طريقة مثال (٢٢) .

$$\begin{array}{ll} 3x_1 - 6x_2 = 8 & ٢ \\ 2x_1 + 5x_2 = 1 & \\ \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 & \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 & - ٤ \\ x_2 + x_3 = 5 & \\ \\ 3w + x + 7y + 9z = 4 & - ٦ \\ w + x + 4y + 4z = 7 & \\ -w - 2y - 3z = 0 & \\ -2w - x - 4y - 6z = 6 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 = 7 & - ١ \\ 2x_1 + 5x_2 = -3 & \\ \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 & \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 & - ٣ \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 & \\ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 1 & - ٥ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = 2 & \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{10}z = 0 & \end{array}$$

٧ - حل النظام

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 = b_3 \end{array}$$

عندما : (أ) $b_1 = -1, b_2 = 3, b_3 = 4$ (ب) $b_1 = 5, b_2 = 0, b_3 = 0$
(ج) $b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = 3$ (د) $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = 3, b_3 = \frac{1}{4}$

٨ - ماهي الشروط التي يجب أن تحققها الثوابت b لكي يكون النظام المعطى متآلفاً .

$$\begin{array}{ll} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = b_1 & x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = b_2 & (ب) \quad 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = b_2 \quad (أ) \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = b_3 & -2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = b_3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = b_4 & \end{array}$$

٩ - اعتبر المصفوفات

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(أ) أثبت أن المعادلة $AX = X$ يمكن كتابتها $(A - I)X = 0$ واستخدام هذه النتيجة لحل $AX = X$ بالنسبة للمصفوفة X .

(ب) حل $AX = 4X$.

١٠ - بدون استخدام ورقة وقلم ، حدد ما إذا كانت المصفوفتان التاليتان قابلتين للانعكاس أم لا

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

إرشاد : خذ في الاعتبار النظامين المتجانسين المرافقين

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 & 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 & x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 7x_4 &= 0 & 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

١١ - ليكن $AX = 0$ نظاماً متجانساً ذا n معادلة خطية في n مجهولاً وله الحل التافه فقط . أثبت أنه إذا كان k أى عدد صحيح موجب فإن النظام $A^k X = 0$ أيضاً له الحل التافه فقط .

١٢ - ليكن $AX = 0$ نظاماً متجانساً ذا n معادلة خطية في n مجهولاً وتكن Q مصفوفة قابلة للانعكاس . أثبت أن للنظام $AX = 0$ الحل التافه فقط إذا وفقط إذا كان للنظام $(QA)X = 0$ الحل التافه فقط .

١٣ - أثبت أن أى مصفوفة A من النوع $n \times n$ تكون قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا أمكن كتابتها كمحاصل ضرب مصفوفات بسيطة .

١٤ - استخدم الجزء (أ) من نظرية (١٢) لتبرهن الجزء (ب) .

٢- المحددات

٢ - ١ - دالة المحدد

من المألوف لنا جميعاً دوال مثل $f(x) = \sin x$ و $f(x) = x^2$ والتي تفرن عدداً حقيقي (x) بمقدار حقيق للمتغير x . حيث إن كلا من x ، $f(x)$ تأخذ قيمًا حقيقية فقط ، فيمكن وصف أمثال تلك الدوال بأنها دوال حقيقية لمتغير حقيق . في هذا القسم نبدأ فكرة دراسة الدوال الحقيقية لمتغير مصفوفي (متغير من المصفوفات) أي دوال تفرن عدداً حقيقياً $f(X)$ بالمصفوفة X . سنكرس جهدها الأساس لدراسة إحدى تلك الدوال التي تسمى دالة المحدد . سيكون لملئنا الخاص بدالة المحدد تطبيقات هامة في نظرية نظم المعادلات الخطية وسنفودنا إلى صيغة واضحة للمصفوفة المكسية لمصفوفة قابلة للانعكاس .

قبل أن يكون في استطاعتنا تعريف دالة المحدد ، يلزمنا أن نرسخ بعض النتائج الخاصة بالتبديلات .

تعريف : التبديلة لفئة الأعداد الصحيحة $\{1, 2, \dots, n\}$ هي أي ترتيب لهذه الأعداد في تسلسل ما دون حذف أو تكرار .

مثال (١) :

توجد ست تبديلات لفئة الأرقام $\{1, 2, 3\}$ هذه التبديلات هي

$$(1, 2, 3) \quad (2, 1, 3) \quad (3, 1, 2)$$

$$(1, 3, 2) \quad (2, 3, 1) \quad (3, 2, 1)$$

يعتبر استخدام مايسمى بشجرة التبديلات أحد الطرق الملائمة لسرد المنتظم للتبديلات . سيتم توضيح هذه الطريقة في مثالنا التالي :

مثال (٢) :

اسرد كل التبديلات لفئة الأعداد $\{1, 2, 3, 4\}$.

الحل :

خذ في الاعتبار الشكل ٢ - ١ النقاط الأربع المميزة بالأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 في قة الشكل تمثل الاختيارات الممكنة للعدد الأول في التبديلة . الأفرع الثلاثة المنبثقة من هذه النقاط تمثل الاختيارات الممكنة للمكان الثاني في التبديلة . لذلك ، إذا بدأت التبديلة (- ، - ، - ، 2) فتكون الممكنات الثلاثة للمكان الثاني هي 1 ، 3 ، 4 . الفرعان المنبثقان من كل نقطة في المكان الثاني يمثلان الاختيارات الممكنة للمكان

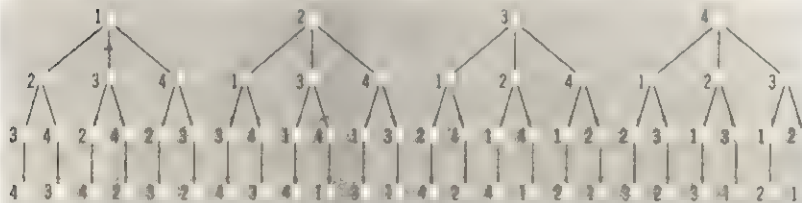
الثالث . لذلك ، إذا بدأت التبديلة $(- , - , 2, 3)$ فيكون الاختياران الممكنان للمكان الثالث هما $1, 4$. في النهاية ، الفرع المنفرد المتبقى من كل نقطة في المكان الثالث يمثل الاختيار الوحيد الممكن للمكان الرابع . لذلك ، إذا بدأت التبديلة $(- , 2, 3, 4)$ ، فالاختيار الوحيد للمكان الرابع هو الرقم 1 ويمكن سرد التبديلات المختلفة الآن بتتبع المسارات الممكنة خلال (الشجرة) من المكان الأول إلى المكان الأخير نحصل بهذه الطريقة على القائمة التالية :

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 3, 2)
(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(4, 2, 1, 3)
(1, 3, 4, 2)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 1, 2)
(1, 4, 3, 2)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 2, 1)

نرى من هذا المثال وجود 24 تبديلة لفئة الأعداد $\{1, 2, 3, 4\}$. كان من الممكن توقع هذه النتيجة دون سرد بعض التبديلات بالاستدلال كما يلي . حيث إن المكان الأول يمكن أن يملأ بأربع طرق ، ومن ثم يمكن ملء المكان الثاني بثلاث طرق ، فتوجد $4 \cdot 3$ طريقة لملء المكانين الأولين . حيث إن المكان الثالث يمكن أن يملأ بطريقتين فتوجد $4 \cdot 3 \cdot 2$ طريقة لملء الأماكن الثلاثة الأولى . في النهاية ، حيث المكان الأخير يمكن أن يملأ بطريقة واحدة فقط ، فتوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ طريقة لملء الأماكن الأربعة كلها . بصفة عامة ، يكون لفئة الأعداد $\{1, 2, \dots, n\}$ عدد $n! = 2 \cdot 1 \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ عدد من التبديلات المختلفة .

سنكتب (j_1, j_2, \dots, j_n) لترمز إلى التبديلة العامة لفئة $\{1, 2, \dots, n\}$ هنا يكون j_1 العدد الأول في التبديلة ، j_2 العدد الثاني ، الخ . يقال أن انعكاساً قد حدث في التبديلة كلما تقدم رقم أكبر رقماً أصغر . يمكن الحصول على العدد الكلي للانعكاسات الحادثة في تبديلة ما كما يلي :

(شكل ٢ - ١)



١ - أوجد عدد الأرقام الأصغر من j_2 والتي تتبع j_1 في التبديلة (٢) . أوجد عدد الأرقام الأصغر من j_2 والتي تتبع j_2 من التبديلة . واصل عملية العد هذه للأرقام j_3, \dots, j_n فيكون مجموع هذه الأرقام هو العدد الكلي للانعكاسات في التبديلة .

مثال (٣) :

عين عدد الانعكاسات في التبديلات التالية :

$$(1, 2, 3, 4) \quad (٣) \quad (2, 4, 1, 3) \quad (٢) \quad (6, 1, 3, 4, 5, 2) \quad (١)$$

$$(١) \text{ عدد الانعكاسات هو } 5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$$

$$(٢) \text{ عدد الانعكاسات هو } 1 + 2 + 0 = 3$$

(٣) لا يوجد أي انعكاس في هذه التبديلة .

تعريف : تسمى التبديلة زوجية إذا كان العدد الكلي للانعكاسات رقماً زوجياً وتسمى فردية إذا كان العدد الكلي للانعكاسات رقماً فردياً .

مثال (٤) :

يصنف الجدول التالي التبديلات المختلفة للفئة $\{1, 2, 3\}$ كتبديلات زوجية وفردية .

التبديلة	عدد الانعكاسات	التصنيف
(1, 2, 3)	0	زوجية
(1, 3, 2)	1	فردية
(2, 1, 3)	1	فردية
(2, 3, 1)	2	زوجية
(3, 1, 2)	2	زوجية
(3, 2, 1)	3	فردية

اعتبر مصفوفة من النوع $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

سنقضي بمحاصل ضرب أولى من A أي حاصل ضرب لعدد n من عناصر A ، بحيث لا يأتي أي اثنين من هذه العناصر من نفس الصف أو نفس العمود .

مثال (٥) :

اسرد كل حواصل الضرب الأولية من المصفوفتين .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (٢) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (١)$$

(١) حيث إنه يوجد عاملان لكل حاصل ضرب أولى ، وحيث إن كل عامل يأتي من صف مختلف ، فيمكن كتابة أي حاصل ضرب أولى على الصورة :

$$a_{1-}a_{2-}$$

حيث تشير الشرط إلى الأعمدة . حيث إنه لا يأتي أى عنصرين في حاصل الضرب من العمود ، فأرقام الأعمدة يجب أن تكون $1\ 2$ أو $2\ 1$ ولذلك يكون $a_{11}\ a_{22}$ ، $a_{12}\ a_{21}$ هما حاصل الضرب الأولين الوحيدين .

(٢) حيث إن كل حاصل ضرب أولى له ثلاثة عوامل . كل واحد منهم يأتي من صف مختلف ، فيمكن كتابة أى حاصل ضرب أولى على الصورة .

$$a_{11}-a_{22}-a_{33}$$

حيث أنه لا يأتي أى عنصرين في حاصل الضرب من نفس العمود ، فيجب ألا تتكرر أرقام الأعمدة ، وبالتالي فأرقام الأعمدة يجب أن تشكل تبديلة للفترة $\{1, 2, 3\}$. هذه التبديلات وعددها $3! = 6$ تؤدي إلى القائمة التالية لحواصل الضرب الأولية :

$$\begin{array}{lll} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{12}a_{21}a_{33} & a_{13}a_{21}a_{32} \\ a_{11}a_{23}a_{32} & a_{12}a_{23}a_{31} & a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

كما يوضح هذا المثال ، يكون لأي مصفوفة A من النوع $n \times n$ عدد $n!$ من حواصل الضرب الأولية . وهذه حواصل الضرب التي على الصورة $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ ، حيث (j_1, j_2, \dots, j_n) تبديلة للفترة $\{1, 2, \dots, n\}$. سنعني بحاصل ضرب أولى مميز من A أى حاصل ضرب $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ مفروباً في $+1$ أو -1 . سنستخدم الإشارة $+$ إذا كانت (j_1, j_2, \dots, j_n) تبديلة زوجية وسنستخدم الإشارة $-$ إذا كانت (j_1, j_2, \dots, j_n) تبديلة فردية .

مثال (٦) :

اسرد كل حواصل الضرب الأولية المميزة من المصفوفتين .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (٢) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (١)$$

حاصل الضرب الأولي المميز	زوجية أم فردية	التبديلة المرافقة	حاصل الضرب الأولي
$a_{11}a_{22}$	زوجية	(1, 2)	$a_{11}a_{22}$
$-a_{12}a_{21}$	فردية	(2, 1)	$a_{12}a_{21}$
حاصل الضرب الأولي المميز	زوجية أم فردية	التبديلة المرافقة	حاصل الضرب الأولي
$a_{11}a_{22}a_{33}$	زوجية	(1, 2, 3)	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$-a_{11}a_{23}a_{32}$	فردية	(1, 3, 2)	$a_{11}a_{23}a_{32}$
$-a_{12}a_{21}a_{33}$	فردية	(2, 1, 3)	$a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	زوجية	(2, 3, 1)	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	زوجية	(3, 1, 2)	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$-a_{13}a_{22}a_{31}$	فردية	(3, 2, 1)	$a_{13}a_{22}a_{31}$

نحن الآن في وضع يسمح بتعريف دالة المحدد .

تعريف : لتكن A مصفوفة مربعة . يرمز للدالة المحدد بالرمز \det ، ونعرف $\det(A)$ بأنه حاصل جمع كل حواصل الضرب الأولية المميزة من A .

مثال (٧) :

بالرجوع إلى مثال ٦ ، نحصل على

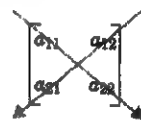
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

من المفيد أن نحصل من هذا المثال على صيغتين متاحيتين كرجع معد . تجنبنا لاستدكار هذه التعبيرات الضخمة ، نقترح أن نستخدم الحيلة البسيطة الموضحة في شكل ٢ - ٢ . الصيغة الأولى في مثال ٧ نحصل عليها من شكل ٢ - ٢ (أ) بضرب العناصر في السهم المتجه إلى اليمين وطرح حاصل ضرب العناصر في السهم المتجه إلى اليسار . الصيغة الثانية في مثال ٧ نحصل عليها بإعادة كتابة العمودين الأول والثاني كما هو موضح في شكل ٢ - ٢ (ب) ، ونحسب المحدد بجمع حواصل الضرب في الأسهم المتجهة إلى اليمين وطرح حواصل الضرب في الأسهم المتجهة إلى اليسار .



(ب)



(أ)

(شكل ٢ - ٢)

مثال (٨) :

احسب قيمتي محددي المصفوفتين

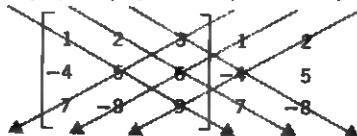
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

استخدام الطريقة الموضحة في الشكل ٢ - ٢ (أ) يعطى .

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

استخدام الطريقة الموضحة في الشكل ٢ - ٢ (ب) يعطى

$$\det(B) = (45) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$



تحذير : نؤكد على أن الطريقة الموضحة في شكل ٢ - ٢ لا تصلح لمحددات المصفوفات من النوع 4×4 أو مصفوفات أكبر .

حساب قيم المحددات مباشرة من التعريف يؤدي إلى حسابات صعبة وفي الواقع أن الحساب المباشر لقيمة محدد من أربعة صفوف وأربعة أعمدة يتضمن حساب عدد $4! = 24$ من حواصل الضرب الأولية المميزة وحساب قيمة محدد من عشرة صفوف وعشرة أعمدة تتضمن حساب عدد $10! = 3,628,800$ من حواصل الضرب الأولية المميزة . لا يمكن حتى لأتينا الحاسبة أن تعالج حسابا محمدا من خمسة وعشرين صفًا وخمسة وعشرين عمودا بهذه الطريقة في وقت معقول . لذلك سيكون جزء كبير من باقى هذا الباب خاصا باثبات خواص للمحددات تبسط حساب قيمة المحدد . ونختتم هذا القسم بملاحظة أن محدد A عادة ما يكتب في الصورة الرمزية التالية

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

حيث تشير \sum إلى أن الحدود يجب أن تجمع لكل التبديلات (j_1, j_2, \dots, j_n) وتأخذ الإشارة + أو - في كل حد على حسب كون التبديلة زوجية أو فردية وتعتبر $|A|$ رمزا بديلا لمحدد المصفوفة A بدلا من $\det(A)$ باستخدام هذا الرمز يمكن كتابة محدد المصفوفة A في مثال ٨ على الصورة

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

تمارين ٢ - ١

١ - أوجد عدد الانعكاسات في كل من التبديلات الآتية للفترة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{array}{lll} \text{(أ)} & (3\ 4\ 1\ 5\ 2) & \text{(ب)} & (4\ 2\ 5\ 3\ 1) & \text{(ج)} & (5\ 4\ 3\ 2\ 1) \\ \text{(د)} & (1\ 2\ 3\ 4\ 5) & \text{(هـ)} & (1\ 3\ 5\ 4\ 2) & \text{(و)} & (2\ 3\ 5\ 4\ 1) \end{array}$$

٢ - صنف التبديلات في تمرين ١ من حيث هي زوجية أم فردية

$$\begin{array}{llll} \begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{vmatrix} = -6 & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 0 & \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \\ \begin{vmatrix} k-3 & 9 \\ 2 & k+1 \end{vmatrix} = -10 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = -9 & \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -8 & \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -7 \end{array}$$

١١ - أوجد كل قيم λ التي عندها $\det(A) = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

١٢ - صنف كل تبديلة للفترة $\{1, 2, 3, 4\}$ كزوجية أو فردية .

١٣ - استخدم نتائج تمرين ١٢ لبناء صيغة لمحدد مصفوفة من النوع 4×4 .

١٤ - استخدم الصيغة التي حصلت عليها في تمرين ١٣ لحساب قيمة محدد المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

١٥ - استخدم تعريف المحدد لحساب قيمة

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{أ})$$

١٦ - برهن على أنه إذا كان للمصفوفة المربعة A عيود من الأصفار ، فإن $\det(A) = 0$.

٢ - ٢ حساب قيم المحددات باختزال الصفوف

نستوضح في هذا القسم أن محدد أى مصفوفة يمكن حساب قيمته باختزال المصفوفة للصورة الصفية المميزة . هذه الطريقة لها أهمية خاصة حيث إنها تتجنب الحسابات الطويلة المتضمنة في التطبيق المباشر لتعريف المحدد .

ندرس أولاً صنفين من المصفوفات التي يمكن حساب محدداتها بسهولة دون اعتبار لكبر المصفوفة .

نظرية ١ : إذا كانت A مصفوفة مربعة بها صف من الأصفار ، فإن $\det(A) = 0$.

البرهان : حيث إن أى حاصل ضرب أولى ميمز من A يحوى على عامل من كل صف من صفوف A ، فكل حاصل ضرب أولى ميمز يحوى عاملا من صف الأصفار وبالتالي تكون قيمته صفرا . حيث أن $\det(A)$ هو مجموع كل حواصل الضرب الأولية المميزة ، فنحصل على $\det(A) = 0$.

تسمى المصفوفة المربعة مثلثية علوية إذا كانت كل العناصر تحت القطر الرئيسى أصفارا . وبالمثل ، تسمى المصفوفة المربعة مثلثية سفلية إذا كانت كل العناصر فوق القطر الرئيسى أصفارا . وسواء كانت المصفوفة مثلثية علوية أو مثلثية سفلية فإنها تسمى مصفوفة مثلثية .

مثال (٩) :

المصفوفة المثلثية العلوية العامة من النوع 4×4 تكون على الصورة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

والمصفوفة المثلثية السفلية العامة من النوع 4×4 تكون على الصورة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

مثال (١٠) :

احسب $\det(A)$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

حاصل الضرب الأولي الوحيد من A الذي يمكن أن يكون غير صفري هو $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ لنرى هذا ، اعتبر حاصل الضرب الأولي المنطقي $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ حيث إن $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ فيجب أن يكون عندنا $j_1 = 1$ لكي يكون عندنا حاصل ضرب أولى غير صفري . إذا كانت $j_1 = 1$ فيجب أن يكون عندنا $j_2 \neq 1$ حيث إنه لا يأتي عاملان من نفس العمود ، وحيث إن $a_{23} = a_{24} = 0$ فيجب أن يكون عندنا $j_2 = 2$ لكي يكون عندنا حاصل ضرب غير صفري . بالاستمرار بهذه الكيفية نحصل على $j_3 = 3$ ، $j_4 = 4$ حيث إن $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ تضرب في 1 في تكوين حاصل الضرب الأولي المميز ، فإننا نحصل على

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

يمكن تطبيق الشرح السابق على أى مصفوفة مثلثية لنحصل على النتيجة العامة التالية .

نظرية ٢ : إذا كانت A مصفوفة مثلثية من النوع $n \times n$ فإن $\det(A)$ هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي ، أى إن $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

مثال (١١) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

توضح النظرية التالية تأثير إجراء عملية بسيطة على صف من المصفوفة على قيمة محدد المصفوفة .

نظرية ٣ : لتكن A أى مصفوفة من النوع $n \times n$.

(١) إذا كانت A' هى المصفوفة الناتجة بضرب صف من A في ثابت k فإن

$$\det(A') = k \det(A)$$

(ب) إذا كانت A' هي المصفوفة الناتجة بإبدال صفين من A فإن $\det(A') = -\det(A)$
 (ج) إذا كانت A' هي المصفوفة الناتجة بإضافة مضاعف صف من A لصف آخر ، فإن $\det(A') = \det(A)$

نحذف البرهان وانظر تمرين ١٥

مثال (١٢) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا حسبنا قيم محددات هذه المصفوفات بالطريقة المستخدمة في مثال ٨ فإننا نحصل على

$$\det(A) = -2, \quad \det(A_1) = -8, \quad \det(A_2) = 2, \quad \det(A_3) = -2$$

لاحظ أن A_1 نحصل عليه بضرب الصف الأول من A في 4 ، A_2 نحصل عليه بتبديل الصفين الأولين ،
 ونحصل على A_3 بطرح ضعف الصف الثالث للمصفوفة A من الصف الثاني . كما تنص النظرية ٣ ، نحصل
 على العلاقات

$$\det(A_1) = 4 \det(A) \quad \det(A_2) = -\det(A) \quad \text{and} \quad \det(A_3) = \det(A)$$

مثال (١٣) :

للتقرير (أ) في نظرية ٣ تفسير بديل يكون مفيداً في بعض الأحيان . تسمح لنا هذه النتيجة بإخراج
 « عامل مشترك » من أي صف لمصفوفة مربعة خارج علامة المحدد . لتوضيح ذلك اعتبر المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

حيث بالصف الثاني للمصفوفة B عامل مشترك k ، حيث إن B هي المصفوفة الناتجة بضرب الصف
 الثاني للمصفوفة A في k ، فالتقرير (أ) من نظرية ٣ يؤكد على أن $\det(B) = k \det(A)$ أي أن

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

سنصيح الآن طريقة بديلة لحساب قيمة المحدد والتي ستجنب القدر الكبير للحسابات المتضخمة في التطبيق المباشر لتعريف المحدد والفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي أن نطبق عمليات بسيطة على الصفوف لاختزال المصفوفة المعطاة A إلى مصفوفة R تكون في الصورة الصفية المميزة . حيث إن الصورة الصفية المميزة لأي مصفوفة تكون مثلثية علوية (انظر تمرين ١٤) ، فيمكن حساب قيمة $\det(R)$ باستخدام نظرية ٢ . ومن ثم يمكن الحصول على $\det(A)$ باستخدام نظرية ٣ التي تربط قيمة $\det(A)$ المجهولة بقيمة $\det(R)$ المعلومة . ويوضح المثال التالي هذه الطريقة .

مثال (١٤) :

احسب قيمة $\det(A)$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل : باختيار A إلى الصورة الصفية المميزة وتطبيق نظرية ٣ ، نحصل على

ابدلنا الصفين الأول والثاني
للمصفوفة A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

العامل المشترك 3 من الصف الأول
للمصفوفة السابقة أخذناه خارج علامة
المحدد (انظر تمرين ١٣) .

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

طرحنا ضعف الصف الأول
للمصفوفة السابقة من الصف
الثالث

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

طرحنا عشرة أمثال الصف الثاني
للمصفوفة السابقة من الصف
الثالث

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

العامل المشترك -55 من الصف
الأخير للمصفوفة السابقة أخذناه
خارج علامة المحدد

$$= (-3)(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

مثال (١٥) :

احسب قيمة $\det(A)$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

طرحنا ضعف الصف
الأول من الصف الثاني

لا نحتاج إلى اختزال آخر إذ أن من نظرية ١ ينتج أن $\det(A) = 0$.

يجب أن يكون واضحاً من هذا المثال أنه حالما كان بالمصفوفة المربعة صفان تناسبيان (مثل الصفين الأول والثاني للمصفوفة A) ، يكون من الممكن إنتاج صف من الأصفار بإضافة مضاعف مناسب لأحدهما إلى الآخر ، لذلك ، إذا كان بالمصفوفة المربعة صفان تناسبيان ، فإن محدها يساوى الصفر .

مثال (١٦) :

كل من المصفوفات التالية بها صفان تناسبيان وإذن بمجرد المعاينة ، حدد كل منها يساوى صفراً .

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

تمارين ٢ - ٢

١ - احسب قيم المحددات التالية بالمعاينة .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -40 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad (د)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (ج)$$

في التمارين من ٢ إلى ٩ احسب قيم محددات المصفوفات المعطاة باعتماد المصفوفة إلى الصورة الصغرى المميزة .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} - ٣$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} - ٢$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & -12 & 5 \end{bmatrix} - ٥$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} - ٤$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} - ٧$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - ٦$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - ٩$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} - ٨$$

١٠ - أوجد $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 5$ بافتراض أن

$$\det \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\det \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d - 3a & e - 3b & f - 3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\det \begin{bmatrix} a + d & b + e & c + f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad (ز)$$

١١ - أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

١٢ - استخدم شرحا مماثلا لذلك المعطى في مثال ١٠ لإثبات أن

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} \quad (أ)$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \quad (ب)$$

١٣ - برهن على أن نظرية (١) تظل صحيحة عندما تستبدل كلمة « صف » بكلمة « عمود » .

١٤ - برهن على أن الصورة الصفية المميزة لمصفوفة مربعة هي مصفوفة مثلثية علوية .

١٥ - برهن الحالات الخاصة التالية لنظرية (٣) .

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (ج)$$

٢ - ٣ خواص دالة المحدد

سندرس في هذا القسم بعض الخواص الأساسية لدالة المحدد . يعطينا عملنا هنا نظرة متعمقة في العلاقة بين المصفوفة المربعة ومحدداتها . إحدى النتائج المباشرة لهذه المادة العلمية ستكون اعتبارا ، لقابلية المصفوفة للانعكاس ، باستخدام المحدد .

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن محورها A ويرمز لها بالرمز A^H تعرف بأنها المصفوفة من النوع $n \times m$ التي عمودها الأول هو الصف الأول للمصفوفة A ، وعمودها الثاني هو الصف الثاني للمصفوفة A ، وعمودها الثالث هو الصف الثالث للمصفوفة A ، الخ .

مثال (١٧) :

مخورات المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 3 \quad 5] \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

هى :

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad D^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

بافتراض أن أنواع المصفوفات تكون بحيث يمكن إجراء العمليات المبينة فإن لعملية التحويل الخواص التالية (أنظر تمرين ١٣) .

خواص عملية التحويل :

- ١) $(A^t)^t = A$.
- ٢) $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- ٣) $(kA)^t = kA^t$ حيث k أى عدد قياسى .
- ٤) $(AB)^t = B^t A^t$.

تذكر أن المحدد لمصفوفة من النوع $n \times n$ يعرف بأنه مجموع كل حواصل الضرب الأولية المميزة من A حيث أن لحاصل الضرب الأولى عاملاً واحداً من كل صف وعاملاً واحداً من كل عمود ، فن البديهي أن يكون للمصفوفتين A و A^t نفس فئة حواصل الضرب الأولية . رغم أننا سنحذف التفاصيل ، يمكن إثبات أن للمصفوفتين A و A^t فى الواقع نفس حواصل الضرب الأولية المميزة ، وهذا يؤدى إلى النظرية التالية :

نظرية ٤ : إذا كانت A أى مصفوفة مربعة فإن $\det(A) = \det(A^t)$.

بسبب هذه النتيجة توشك كل النظريات عن المحددات التى تحوى فى تقريرها على الكلمة «صف» أن تكون صحيحة أيضاً عندما تحل الكلمة «عمود» محل «صف» لبرهنة تقرير الأعمدة نحتاج فقط إلى تحويل المصفوفة

ليبدل تقرير الأعمدة إلى تقرير صفوف ، ثم تطبق النتيجة المناظرة المعروفة بالنسبة للمصفوفة . لتوضيح الفكرة ، افترض أننا نريد إثبات أن تبديل عمودين للمصفوفة المربعة A يغير إشارة $\det(A)$. يمكننا السير كما يل : لتكن A' هي المصفوفة الناتجة عندما يتبدل العمود r والعمود s للمصفوفة A . لذلك تكون $(A')^t$ هي المصفوفة الناتجة عندما يتبدل الصف r والصف s للمصفوفة A^t لذا فإن

$$\det(A') = \det(A')^t \quad (\text{نظرية ٤})$$

$$= -\det(A^t) \quad (\text{نظرية ٣ ب})$$

$$= -\det(A) \quad (\text{نظرية ٤})$$

وذلك يبرهن النتيجة .

الأمثلة التالية توضح نطاقاً عديدة من المحددات التي تعتمد على خواص أعمدة المصفوفة .

مثال (١٨) :

بالمعاينة ، المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

محددها يساوى صفراً إذ أن العمودين الأول والثاني تناسبيان .

مثال (١٩) :

احسب قيمة محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

من الممكن حساب هذا المحدد كما سبق باستخدام عمليات بسيطة على الصفوف لاختزال A إلى صورة صافية مميزة . لكن من ناحية أخرى يمكننا وضع A في صورة مثلثية سفلية في خطوة واحدة بطرح ثلاثة أمثال العمود الأول من الرابع لتحصل على

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

يوضح هذا المثال أنه من الحكمة دائماً أن نفطن للعملية الماهرة على الأعمدة التي ستجعل الحسابات قصيرة .

افترض أن A و B مصفوفتان من النوع $n \times n$ وأن k أى عدد قياسي ، سندرس الآن بعض العلاقات الممكنة بين $\det(A)$ ، $\det(B)$ والمحددات

$$\det(kA), \det(A+B) \text{ و } \det(AB)$$

حيث أن أى عامل مشترك فى صف من المصفوفة يمكن أخذه خارج علامة المحدد ، وحيث أن كل صف من الصفوف وعددها n بالمصفوفة kA يحتوى العامل المشترك k ، فإننا نحصل على

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad (2.1)$$

مثال (٧٠) :

اعتبر المصفوفتين

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

بالحساب المباشر نجد أن $\det(A) = 4$ و $\det(5A) = 100$ يتفق هذا مع العلاقة (2.1) ،
والتي تؤكد على أن $\det(5A) = 5^2 \det(A)$.

للأسف ، لاتوجد علاقة بسيطة بين $\det(A)$ ، $\det(B)$ و $\det(A+B)$ فى صورة عامة ،
بصفة خاصة نؤكد على أن $\det(A+B)$ عادة لايساوى $\det(A) + \det(A)$ ، يوضح المثال
التالى هذه النقطة .

مثال (٧١) :

اعتبر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

لدينا $\det(A) = 1$ ، $\det(B) = 8$ و $\det(A+B) = 23$ لذلك فإن $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
بالرغم من هذه النتيجة السلبية ، توجد نتيجة واحدة مهمة تتعلق بمجموع
المحددات غالباً ما تكون مفيدة . للايضاح ، اعتبر المصفوفتين من النوع 2×2

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \text{ ، } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

والتيان مختلفتان فقط فى الصف الثانى . من الصيغة فى مثال (٧٠) ، نحصل على

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(A') &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a'_{22} - a_{12}a'_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + a'_{22}) - a_{12}(a_{21} + a'_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

أى أن

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} \end{bmatrix}$$

هذا المثال حالة خاصة من النتيجة العامة التالية :

لتكن A ، A' و A'' مصفوفات من النوع $n \times n$ بحيث تختلف فقط في صف واحد وليكن الصف r .
افترض أن الصف r للمصفوفة A'' يمكن الحصول عليه لجميع العناصر المتناظرة في الصفين ذات الرقم r للمصفوفتين A ، A' فيكون

$$\det(A'') = \det(A) + \det(A')$$

وتوجد نتيجة ماثلة خاصة بالأعمدة .

مثال (٢٢) :

بحساب قيم المحددات ، يمكن للقارئ أن يتأكد من أن

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 + 0 & 4 + 1 & 7 + (-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

نظرية ٥ : إذا كانت A و B مصفوفتين مربعيتين من نفس النوع ، فإن :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

من المثير للدهشة والإنعاش أن تقابل بين البساطة الطريفة لهذه النتيجة والطبيعة المعقدة لكل من ضرب المصفوفات وتعريف المحددات . سنحذف البرهان .

مثال (٢٣) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

نجد لدينا أن $\det(A) \det(B) = (1)(-23) = -23$ ومن ناحية أخرى نجد بالحساب المباشر أن $\det(AB) = -23$ لذلك فإن $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

في نظرية (١٣) بالباب الأول ، سردنا ثلاثة تقارير هامة والتي تكافئ قابلية المصفوفة للانكاس .
ميساعدنا المثال التالي لإضافة نتيجة أخرى لتلك القائمة .

مثال (٢٤) :

النرض من هذا المثال هو إثبات أنه إذا لم توجد صفوف مكونة بكاملها من أصفار للصورة المميزة

المختزلة R لمصفوفة مربعة ، فإن R يجب أن تكون مصفوفة الوحدة . يمكن توضيح هذا باعتبار المصفوفة التالية من النوع 3×3 والتي نفترض أنها في الصورة الصفية المميزة المختزلة .

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

أما أن يتكون الصف الأخير في هذه المصفوفة بكامله من أصفار أو أنه لا يكون كذلك . إذا لم يكن ، فإن المصفوفة لا تحوى أى صف صفرى ، وبالتالي يكون لكل صف من الصفوف واحد متقدم . حيث أن هذه الأحاد المتقدمة تحدث باقتراب مطرد إلى اليمين كيفما تتحرك إلى أسفل المصفوفة ، فإن كل واحد من هذه الأحاد يجب أن يحدث على القطر الرئيسى . حيث أن العناصر الأخرى في نفس العمود الذى فيه أحد هذه الأحاد تكون أصفاراً ، فإن R يجب أن يساوى I . لذلك أما أن يكون R به صف صفرى أو أن $R = I$.

نظرية ٦ : تكون المصفوفة المربعة A قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$

البرهان : إذا كانت A قابلة للانعكاس ، فإن $I = AA^{-1}$ ولذلك فإن $1 = \det(I) = \det(A) \det(A^{-1})$. وبهذا فإن $\det(A) \neq 0$. بالعكس ، بافتراض أن $\det(A) \neq 0$ ، نستنتج أن A مكافئة صفياً للمصفوفة I ، وعليه نستخلص من نظرية (١٠) بالباب الأول أن A قابلة للانعكاس . لتكن R هي الصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة A . حيث أنه يمكن الحصول على R من A بواسطة متتابعة من العمليات البسيطة على الصفوف فيمكننا إيجاد مصفوفات بسيطة E_1 ، E_2 ، ... ، E_k بحيث تكون $A = R E_1 E_2 \dots E_k$ أى $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} R$ لذلك فإن

$$\det(A) = \det(E_1^{-1}) \det(E_2^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}) \det(R)$$

حيث أننا نفترض أن $\det(A) \neq 0$ ، فينتج من هذه المعادلة أن $\det(R) \neq 0$ لذلك فلا يوجد بالمصفوفة R أى صفوف صفرية ، إذن $R = I$ (أنظر مثال ٢٤) .

نتيجة : إذا كانت A قابلة للانعكاس فإن

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

البرهان : حيث أن $A^{-1}A = I$ فإن $\det(A^{-1}A) = \det(I)$ ، أى أن ، $\det(A^{-1}) \det(A) = \det(I) = 1$ ، $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ، $\det(A) = 1$.

مسألة (٢٥) :

حيث أن الصفتين الأول والثالث للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

صفان تناسبيان ، فإن $\det(A) = 0$ ، لذلك فإن المصفوفة A غير قابلة للانعكاس .

تمارين ٢ - ٣

١ - أوجد المحورات للمصفوفات :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (د) \quad [7 \ 0 \ 2] \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

٢ - حقق نظرية ٤ بالنسبة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

٣ - تحقق أن $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ عندما

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٤ - استخدم نظرية ٦ لتحديد أي من المصفوفات التالية قابلة للانكاس .

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

٥ - افترض أن $\det(A) = 5$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

أوجد :

$$\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix} \quad (د) \quad \det[(2A)^{-1}] \quad (ج) \quad \det(2A^{-1}) \quad (ب) \quad \det(3A) \quad (أ)$$

٦ - أثبت بدون حساب مباشر أن $x = 0$ و $x = 2$ تحققان

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

٧ - أثبت بدون حساب مباشر أن

$$\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

٨ - لأي قيمة (قيم) للثابت k تفشل A أن تكون قابلة للانعكاس ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

٩ - لتكن A ، B مصفوفتين من النوع $n \times n$. أثبت أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس فإن $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$.

١٠ - (أ) أوجد مصفوفة غير صفيرية A من النوع 3×3 بحيث تكون $A = A^t$.

(ب) أوجد مصفوفة غير صفيرية A من النوع 3×3 بحيث تكون $A = -A^t$.

١١ - ليكن a_{ij} العنصر في الصف i والعمود j للمصفوفة A . في أي صف وأي عمود للمصفوفة A^t يظهر a_{ij} .

١٢ - ليكن $AX = 0$ نظاماً لعدد n من المعادلات الخطية ذات n مجهولاً . أثبت أن النظام يكون له حل غير تافه إذا وفقط إذا كان $\det(A) = 0$.

١٣ - لتكن

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

أثبت أن

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (\text{ج}) \quad (A+B)^t = A^t + B^t \quad (\text{ب}) \quad (A^t)^t = A \quad (أ) \\ (kA)^t = kA^t \quad (\text{د})$$

١٤ - أثبت أن $(A^t B^t) = BA$.

١٥ - تسمى المصفوفة المربعة A مصفوفة متماثلة إذا كانت $A^t = A$ وتسمى شبه متماثلة إذا كانت $A^t = -A$. أثبت أنه إذا كانت B مصفوفة مربعة فإن :

$$(أ) \quad BB^t \quad \text{و} \quad B + B^t \quad \text{مصفوفتان متماثلتان} \quad (\text{ب}) \quad B - B^t \quad \text{مصفوفة شبه متماثلة} .$$

٢ - ٤ المفكوك باستخدام المتممات المميزية - قاعدة كرامير

في هذا القسم سنأخذ في الاعتبار طريقة أخرى لحساب قيم المحددات . كنتيجة لعملنا هنا ، سنحصل على صيغة لمعكوس مصفوفة قابلة للانعكاس كما نحصل أيضاً على صيغة لحل أنظمة معينة للمعادلات الخطية بدلالة المحددات .

تعريف : إذا كانت A مصفوفة مربعة ، فإن المحدد المتمم للعنصر a_{ij} يرمز له بالرمز M_{ij} ويعرف بأنه محدد المصفوفة الجزئية التي تبقى بعد حذف الصف i والعمود j من المصفوفة A . يرمز للعدد $M_{ij}^{(-1)^{i+j}}$ بالرمز C_{ij} (ويسمى المتمم المميز) أو (العامل) للعنصر a_{ij} .

مثال (٢٦) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

المحدد المتمم للعنصر a_{11} هو

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

المتمم المميز (المعامل) للعنصر a_{11} هو

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

بالمثل متمم العنصر a_{32} هو

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

ومعامل a_{32} هو

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

لاحظ أن المتمم المميز (المعامل) والمتمم لعنصر ما a_{ij} يختلفان فقط في الإشارة أي أن $C_{ij} = \pm M_{ij}$ وطريقة سريعة لتحديد ما إذا كنا سنستخدم الإشارة «+» أم الإشارة «-» هي أن نستخدم الحقيقة أن الإشارة التي تربط C_{ij} و M_{ij} تكون في الصف i والعمود j في الترتيب التالي .

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

على سبيل المثال $C_{11} = M_{11}$ ، $C_{21} = -M_{21}$ ، $C_{12} = -M_{12}$ ، $C_{22} = M_{22}$ ، الخ .
اعتبر المصفوفة العامة من النوع 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

أثبتنا في مثال (٧) أن

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2.2)$$

ويمكن كتابة ذلك كما يلي :

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

حيث أن المبررات التي في الأقواس هي بالضبط المتجهات المميزة C_{31} ، C_{21} ، C_{11} (حقوق ذلك) ، فيكون

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \quad (2.3)$$

نرى من المعادلة (2.3) أن محدد A يمكن حسابه بضرب عناصر العمود الأول للمصفوفة A في متجهاتها المميزة وجمع حواصل الضرب الناتجة . هذه الطريقة لحساب قيمة $\det(A)$ تسمى فك المحدد باستخدام المتجهات المميزة لعناصر العمود الأول للمصفوفة A .

مثال (٢٧) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

احسب قيمة $\det(A)$ بالفك باستخدام المتجهات المميزة لعناصر العمود الأول للمصفوفة A .

الحل : باستخدام (2.3) نجد أن :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1 \end{aligned}$$

بإعادة ترتيب الحدود في (2.2) بطرق مختلفة ، يمكننا الحصول على صيغ أخرى مثل (2.3) . من المؤكد أنه لن توجد أي صعوبة للتحقق من صحة كل مما يأتي (أنظر تمرين ٢٣) :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \end{aligned} \quad (2.4)$$

لاحظ أن في كل معادلة ، كل من العناصر والمتجهات المميزة تأتي من نفس الصف أو نفس العمود . نسمى هذه المعادلات مفكوكات $\det(A)$ باستخدام المتجهات المميزة .

النتائج التي قد أعطيناها آنفاً للمصفوفات من النوع 3×3 هي حالة خاصة للنظرية العامة التالية ، والتي سنذكر نصها بدون برهان .

نظرية ٧ :

يمكن حساب المحدد للمصفوفة A من النوع $n \times n$ بضرب العناصر في أى صف (أو عمود) في متمماتها المميزة وجمع حواصل الضرب الناتجة ، بمعنى أن ، لكل $1 \leq i \leq n$ ، $1 \leq j \leq n$ فإن

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj}$$

(المفكوك باستخدام المتممات المميزة لعناصر العمود رقم j)

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

و (المفكوك باستخدام المتممات المميزة لعناصر الصف رقم i)

مثال (٢٨) :

لتكن A المصفوفة الآتي في مثال (٢٧) . احسب قيمة $\det(A)$ بفك المحدد باستخدام المتممات المميزة لعناصر الصف الأول (أى باستخدام مفكوك المحدد من صفه الأول) .

الحل :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) = -1$$

يتفق هذا مع النتيجة التي حصلنا عليها في مثال (٢٧) .

ملاحظة : لم يكن من الضروري في هذا المثال أن نحسب المتسم المميز الأخير ، حيث أنه كان مضروباً في الصفر . بصفة عامة ، أن أحسن التباديل (الاستراتيجيات) لحساب قيمة المحدد بالفك باستخدام المتممات المميزة ، هي أن نجري الفك من الصف أو العمود الذي يشتمل على أكبر عدد من الأصفار .

عل الرغم من أن الفك باستخدام المتممات المميزة في العادة ليس له فاعلية الاختزال للصورة المثلثية في حساب قيمة المحدد ، فيمكن في بعض الأحيان استخدام الطريقتين معاً في حالات معينة ، لتؤديا إلى أسلوب حسابي فعال . يوضح المثال التالي هذه الفكرة .

مثال (٢٩) :

احسب قيمة $\det(A)$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل : بإضافة مضاعفات مناسبة للصف الثاني إلى الصفوف الأخرى ، نحصل على

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad \boxed{\text{مفكوك المحدد من العمود الأول}}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \boxed{\text{أضفنا الصف الأول إلى الصف الثالث}}$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \boxed{\text{مفكوك المحدد من العمود الأول}}$$

$$= -18$$

في المفكوك باستخدام المتتمات المميزة نحسب $\det(A)$ بضرب عناصر صف أو عمود في متتماتها المميزة ثم جمع حواصل الضرب الناتجة . كأننا نجد أنه إذا ضربت أى صف في المتتمات المميزة للعناصر المناظرة بصف آخر ، فإن مجموع حواصل الضرب هذه يكون دائماً مساوياً للصفر . (نتحقق هذه النتيجة أيضاً بالنسبة إلى الأعمدة) . رغم أننا سنحذف البرهان في الحالة العامة ، فإن المثال التالى يوضح فكرة البرهان في حالة خاصة .

مثال (٣٠) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

اعتبر الكمية

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$$

والتي تتشكل بضرب عناصر الصف الأول في المتتمات المميزة للعناصر المناظرة بالصف الثالث ثم جمع حواصل الضرب الناتجة . سنثبت الآن أن هذه الكمية مساوية للصفر . باستخدام الخيلة التالية . ننشئ مصفوفة جديدة A' بإحلال محل الصف الثالث للمصفوفة A نسخة أخرى للصف الأول . لذلك فإن

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

لتكن C'_{33} ، C'_{32} ، C'_{31} هي المتتمات المميزة لعناصر الصف الثالث بالمصفوفة A' . حيث أن الصفين الأولين للمصفوفتين A' ، A هما نفس الصفين ، وحيث أن حساب قيمة C_{33} ، C_{32} ، C_{31} ، C'_{33} ، C'_{32} ، C'_{31} يتضمن فقط عناصر من الصفين الأولين للمصفوفتين A ، A' فينتج أن

$$C_{31} = C'_{31}, \quad C_{32} = C'_{32}, \quad C_{33} = C'_{33}$$

حيث أن المصفوفة A' بها صفان متماثلان ، فإن

$$\det(A') = 0 \quad (2.5)$$

ومن ناحية أخرى ، حساب قيمة $\det(A')$ بفك A' باستخدام المتتمات المميزة لعناصر الصف الثالث يعطى

$$\begin{aligned} \det(A') &= a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} \\ &= a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \end{aligned} \quad (2.6)$$

من (2.5) ، (2.6) نحصل على

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0$$

تعريف : إذا كانت A أى مصفوفة من النوع $n \times n$ وكان C_{ij} المتتم المميز للعنصر a_{ij} فإن المصفوفة

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

تسمى مصفوفة المتتمات المميزة من A . محورة هذه المصفوفة تسمى المصفوفة المرتبطة بالمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $\text{adj}(A)$.

مثال (٣١) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

المتتمات المميزة لعناصر A هي

$$\begin{aligned} C_{11} &= 12 & C_{12} &= 6 & C_{13} &= -16 \\ C_{21} &= 4 & C_{22} &= 2 & C_{23} &= 16 \\ C_{31} &= 12 & C_{32} &= -10 & C_{33} &= 16 \end{aligned}$$

وإذن مصفوفة المتتمات المميزة هي

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة المرتبطة هي

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

نحن الآن في وضع يسمح لنا بإنشاء صيغة لمعكوس مصفوفة قابلة للانعكاس .

نظرية ٨ : إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس ، فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

البرهان : سنثبت أولاً أن

$$A \text{adj}(A) = \det(A)I$$

اعتبر حاصل الضرب

$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف i والعمود j للمصفوفة $A \text{adj}(A)$ هو

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \quad (2.7)$$

أنظر (الخططين المظللين أعلاه)

إذا كانت $i = j$ فإن (2.7) يكون هو مفكوك المحدد $\det(A)$ من العمود i للمصفوفة A (أنظر نظرية ٧) . أما إذا كانت $i \neq j$ فإن العناصر a والمتممات المميزة تأتي من صفوف مختلفة للمصفوفة A وبالتالي تكون قيمة (2.7) هي الصفر لذلك فإن

$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \quad (2.8)$$

حيث أن A مصفوفة قابلة للانعكاس ، فإن $\det(A) \neq 0$ لذلك فيمكن كتابة (2.8) كما يلي :

$$\frac{1}{\det(A)} [A \text{adj}(A)] = I$$

أو

$$A \left[\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right] = I$$

وضرب كل من الطرفين من اليسار في A^{-1} يعطى

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad \blacksquare \quad (2.9)$$

مثال (٣٢) :

استخدم (2.9) لإيجاد معكوس المصفوفة A في مثال (٣١) .

الحل : يستطيع القارئ التحقق من أن $\det(A) = 64$ لذلك فإن

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نلاحظ أنه بالنسبة للمصفوفات التي من نوع أكبر من 3×3 تكون طريقة إيجاد المصفوفة العكسية التي في هذا المثال من الناحية الحسابية دون الأسلوب المعطى في قسم ١ - ٦ . من ناحية أخرى فإن طريقة إيجاد المصفوفة العكسية في قسم ١ - ٦ هي مجرد إجراء حسابي أو منهج لحساب A^{-1} وليس لها فائدة كبيرة في دراسة خواص المعكوس . يمكن استخدام الصيغة 2.9 للحصول على خواص المعكوس دون حساب فعل له (أنظر تمرين ٢٠) .

بنزعة مماثلة ، غالباً ما يكون من المفيد أن نحصل على صيغة كل أنظمة المعادلات الخطية والتي يمكن استخدامها لدراسة خواص الحل دون إيجاد حل للنظام . تعطينا النظرية التالية مثل هذه الصيغة لنظام من n من المعادلات الخطية في n من المجهول . تعرف الصيغة بأنها قاعدة كرامير .

نظرية ٩ : (قاعدة كرامير)

إذا كان $AX=B$ نظاماً من n من المعادلات الخطية في n من المجهول بحيث أن $\det(A) \neq 0$ ، فيكون للنظام حل وحيد وهذا الحل هو

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

حيث A_j هي المصفوفة الناتجة بإحلال عناصر العمود j للمصفوفة A محل عناصر المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

البرهان : إذا كان $\det(A) \neq 0$ ، فإن A تكون قابلة للانعكاس ، وبنظرية 11 بالقسم ١ - ٧ ، يكون $X = A^{-1}B$ الحل الوحيد للمعادلة $AX = B$. وإذن باستخدام نظرية (٨) نحصل على

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)B = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

وبإجراء ضرب المصفوفتين نحصل على

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \cdots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

وإذن العنصر في الصف j للمصفوفة X يكون

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}}{\det(A)} \quad (2.10)$$

والآن لتكن

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث أن A_j تختلف عن A فقط في العمود j ، فتكون المصفوفات المميزة للعناصر b_1, b_2, \dots, b_n في المصفوفة A_j هي نفس المصفوفات المميزة للعناصر المناظرة في العمود j للمصفوفة A . لذلك ففكوك المحدد $\det(A_j)$ من العمود j يكون على الصورة

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

التعويض بهذه النتيجة في (2.10) يعطى

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

مثال (٣٣) :

استخدم قاعدة كرامير لحل

$$\begin{aligned} x_1 + \quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

الحل :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

لذلك فإن

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

من الضروري لحل نظام من n من المعادلات في n من المجهول ، أن نحسب قيم $n + 1$ من المحددات لمصفوفات من النوع $n \times n$. بالنسبة للأنظمة ذات أكثر من ثلاث معادلات ، تعتبر طريقة جاوس للحذف من الناحية الحسابية أعلى شأنًا حيث أنه من الضروري فقط اختزال مصفوفة ممتدة واحدة من النوع $n \times (n+1)$ مع ذلك ، فإن قاعدة كرامير تعطي صيغة للحل .

تمارين ٢ - ٤

١ - لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد كل المتتمات (ب) أوجد كل المتتمات المميزة

٢ - لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد

(أ) M_{13} و C_{13} (ب) M_{23} و C_{23} (ج) M_{22} و C_{22} (د) M_{21} و C_{21}

٣ - احسب قيمة محدد المصفوفة المغطاة في تمرين (١) بفك المحدد من :

(أ) الصف الأول (ب) العمود الأول (ج) الصف الثاني (د) العمود الثاني
(هـ) الصف الثالث (و) العمود الثالث

٤ - بالنسبة للمصفوفة في تمرين ١ ، أوجد

(أ) $\text{adj}(A)$ (ب) A^{-1} وذلك باستخدام طريقة مثال (٣٢).

احسب في التمارين من ٥ إلى ١٠ قيمة $\det(A)$ ، بفك المحدد من صف أو عمود من اختيارك .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad - ٦$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad - ٥$$

$$\begin{bmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{bmatrix} \quad - ٨$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{bmatrix} \quad - ٧$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad - ١٠$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 14 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad - ٩$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad - ١١ \text{ لتكن}$$

(أ) احسب قيمة A^{-1} باستخدام طريقة مثال ٣٢ .

(ب) احسب قيمة A^{-1} باستخدام طريقة مثال ٢٩ بالقسم ١ - ٦ .

(ج) أي الطريقتين تتضمن حسابات أقل ؟

في التمارين من ١٢ إلى ١٧ ، استخدم قاعدة كرامير إذا كان يمكن تطبيقها لحل نظم المعادلات .

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned} \quad - ١٣$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned} \quad - ١٢$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \quad - ١٥$$

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - 2y - 4z &= -4 \end{aligned} \quad - ١٤$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 15 \end{aligned} \quad - ١٧$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -32 \\ 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 &= 14 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= -4 \end{aligned} \quad - ١٦$$

١٨ - استخدم قاعدة كرامير لحل النظام بالنسبة إلى z بدون الحل بالنسبة إلى w, y, x

$$4x + y + z + w = 6$$

$$3x + 7y - z + w = 1$$

$$7x + 3y - 5z + 8w = -3$$

$$x + y + z + 2w = 3$$

١٩ - ليكن $AX = B$ هو النظام المعطى في تمرين (١٨) :

(أ) حل النظام باستخدام قاعدة كرامير .

(ب) حل النظام باستخدام طريقة جاوس - جوردان للحذف .

(ج) أى الطريقتين تتضمن أقل كمية من الحسابات ؟

٢٠ - برهن على أنه إذا كان $\det(A) = 1$ وكانت عناصر A كلها أعداداً صحيحة فإن عناصر A^{-1} تكون كلها أعداداً صحيحة .

٢١ - ليكن $AX=B$ نظاماً من n معادلة خطية في n مجهولاً بمعاملات وثوابت من الأعداد الصحيحة . أثبت أن $\det(A) = 1$ ، ومن ثم فتكون عناصر الحل X أعداداً صحيحة .

٢٢ - برهن على أنه إذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية وقابلة للانعكاس ، فإن A^{-1} مثلثية علوية .

٢٣ - اشتق المفكوكين الأول والأخير الواردين في (2.4) .

٢٤ - أثبت أنه يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (a_1, b_1) ، (a_2, b_2) على الصورة .

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٢٥ - أثبت أن النقط الثلاث (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، (x_3, y_3) تقع على خط مستقيم إذا وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٢٦ - أثبت أن معادلة المستوى المار بالنقط (a_1, b_1, c_1) ، (a_2, b_2, c_2) ، (a_3, b_3, c_3) ، والتي لاتقع على استقامة واحدة يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٣- المتجهات في الفضاء الثنائي والفضاء الثلاثي

يمكن للقارئ المتعرف على محتويات هذا الفصل أن يتجه مباشرة إلى الفصل الرابع دون أن يفقد تتبعه للموضوع .

٣ - ١ مقدمة في المتجهات (هندسية)

تعرض في هذا القسم المتجهات في الفضاء الثنائي والفضاء الثلاثي عرضاً هندسياً . وتعرف العمليات الحسابية على المتجهات وتستنتج بعض الخواص الأساسية لهذه العمليات .

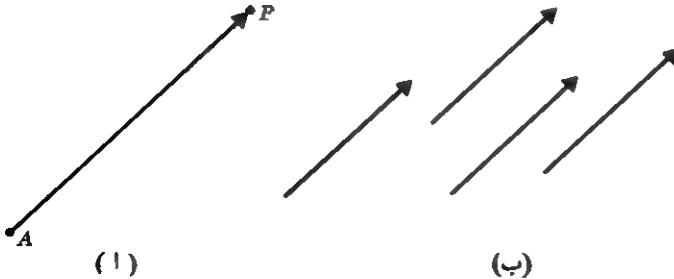
يوصف الكثير من الكميات الطبيعية مثل المساحة والطول والكتلة وصفاً كاملاً بمجرد إعطاء عدد حقيقي يمثل مقدار الكمية ولا تحدد كميات طبيعية أخرى ، والتي تسمى بـ **متجهات** ، تحديداً تماماً إلا عند تخصيص المقدار والاتجاه . والقوة والإزاحة والسرعة أمثلة للمتجهات .

ويمكن تمثيل المتجه هندسياً كجزء من خط مستقيم أو كسهم موجه في الفضاء الثنائي أو الفضاء الثلاثي . ويعين اتجاه السهم اتجاه المتجه بينما يصف طول السهم قيمة المتجه . ويسمى ذيل السهم بنقطة البداية للمتجه ورأس السهم بنقطة النهاية . وسوف نرمز للمتجهات بحروف صغيرة مميزة a, k, v, w, x ، وعند مناقشة المتجهات سوف نشير إلى الأعداد ككميات قياسية . كل الكميات القياسية التي نستخدمها ستكون أرقاما حقيقية وسوف نرفر لها بالحروف العادية الصغيرة a, k, v, w, x

إذا كانت نقطة البداية للمتجه v هي A ونقطة النهاية هي B كما في شكل ٣ - ١ ، فإننا نكتب

$$v = AB$$

تسمى المتجهات التي لها نفس الطول ونفس الاتجاه ، كذلك المتجهات في شكل ٣ - ١ ب بـ **متجهات متكافئة** . وحيث أننا نريد أن يحدد المتجه فقط بطوله واتجاهه فإن المتجهات المتكافئة تعتبر متساوية حتى وإن كانت تقع في أماكن مختلفة .



(شكل ٣ - ١) (١) المتجه AB (ب) متجهات متكافئة

إذا كان v و w متجهين متكافئين فإننا نكتب

$$v = w$$

تعريف : إذا كان v و w أى متجهين فإن المجموع $v + w$ هو المتجه الذى يحدد كما يلي صم المتجه w بحيث تكون نقطة بدايته منطبقه على نقطة نهاية v . يمثل المتجه $v + w$ بالسهم الواصل من نقطة بداية v إلى نقطة نهاية w (شكل ٢ - ٣) .

فى شكل ٣ - ٣ كونا المجموعتين $v + w$ و $w + v$ من الواضح أن

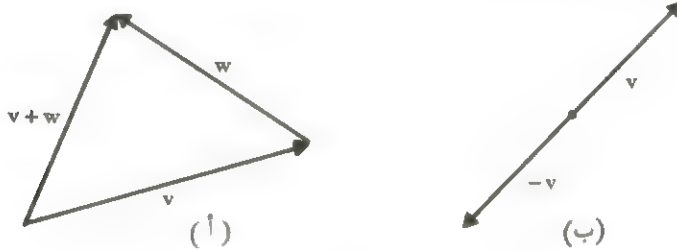
$$v + w = w + v$$

وأن المجموع يطبق على قطر متوارى الأضلاع المحدد من v و w عندما يوضع هذان المتجهان بحيث يكون لهما نفس نقطة البداية .

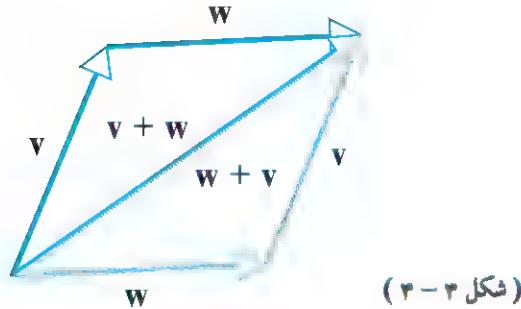
يسمى المتجه الذى طوله صفر بالمتجه الصفري ويرمز له بالرمز 0 . ونعرف

$$0 + v = v + 0 = v$$

لكل متجه v وحيث أنه لا يوجد اتجاه طبيعى للمتجه الصفري فإننا سوف نتفق أنه يمكن أن يأخذ أى اتجاه يكون مناسباً للمسألة تحت الاعتبار .



(شكل ٢ - ٣)



(شكل ٣ - ٣)

إذا كان v هو أى متجه غير صفري فن الواضح أن المتجه الوحيد w الذى يحقق أن $v + w = 0$ هو المتجه الذى له نفس المقدار مثل v ولكنه يتجه العكس (شكل ٣-٢ ب). يسمى هذا المتجه بسالب v (أو المعكوس بالنسبة للمتجه v) ونكتب

$$w = -v$$

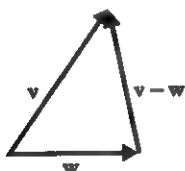
بالإضافة إلى ذلك فإننا نعرف $-0 = 0$.

تعريف : إذا كان v و w أى متجهين فإن الطرح يعرف بواسطة

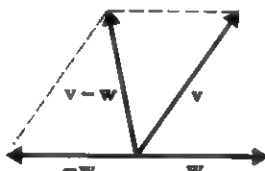
$$v - w = v + (-w)$$

(انظر شكل ٣-٤ أ)

للمحصل على الفرق $v - w$ بدون تكوين $-w$ ، ضع v و w بحيث تنطبق نقطتا البداية لهما فيكون المتجه من نقطة نهاية w إلى نقطة نهاية v هو المتجه $v - w$ (شكل ٣-٤ ب).



(ب)

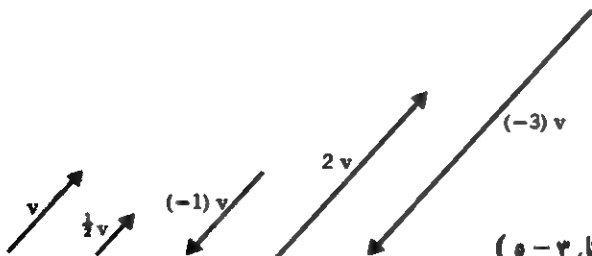


(أ)

(شكل ٣-٤)

تعريف : إذا كان v متجه و k عدد حقيقى (قياسى) فإن حاصل الضرب kv يعرف بأنه المتجه الذى طوله $|k|$ من المرات طول v واتجاهه هو نفس اتجاه v إذا كان $k > 0$ وعكس اتجاه v إذا كان $k < 0$ ونعرف $kv = 0$ إذا كان $k = 0$ أو $v = 0$.

يبين شكل ٣-٥ العلاقة بين متجه v والمتجهات $\frac{1}{2}v$ ، $(-1)v$ ، $2v$ و $(-3)v$.



(شكل ٣-٥)

لاحظ أن المتجه $(-1)v$ له نفس الطول مثل v ولكنه يتجه للعكس لهذا فإن $(-1)v$ هو بالضبط سالب v أى أن

$$(-1)v = -v$$

يمكن عادة تبسيط المسائل المحتوية على متجهات بإدخال نظام إحداثيات متعامدة . سوف نقصر المناقشة في هذه المرحلة على المتجهات في الفضاء الثنائي (المستوى) . اعتبر أن \mathbf{v} هو أى متجه في المستوى وأفرض ، كما في شكل ٣ - ٦ . أن \mathbf{v} قد وضع بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل لنظام إحداثيات متعامدة . يسمى الإحداثيان (v_1, v_2) لنقطة نهاية \mathbf{v} بمركبتى \mathbf{v} ، ونكتب .

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

إذا وضع متجهان متكافئان \mathbf{v} و \mathbf{w} بحيث تقع نقطتا البداية لهما عند نقطة الأصل فإنه من الواضح أن نقطتي النهاية لهما يجب أن تنطبقا (حيث أن المتجهين لهما نفس الطول والاتجاه) . ولهذا يكون للمتجهين نفس المركبتين . وبنفس الوضوح فإن المتجهات التي لها نفس المركبات يجب أن يكون لها نفس الطول ونفس الاتجاه ومن ثم تكون متكافئة وملخص ذلك هو أن المتجهين

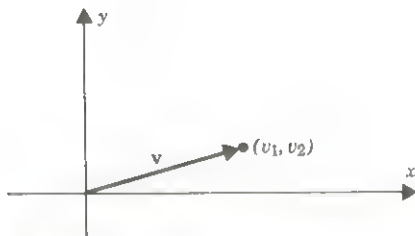
$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

يكونان متكافئين إذا كان فقط إذا كان

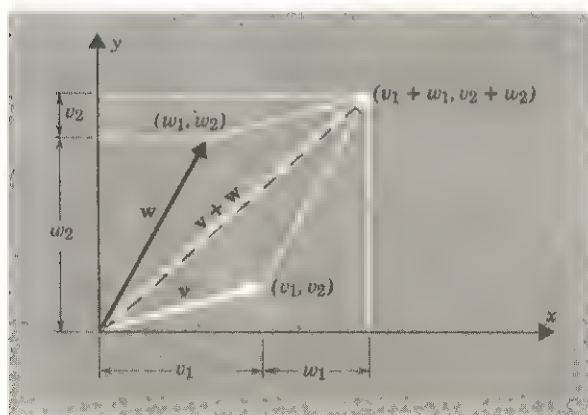
$$v_2 = w_2 \quad \text{و} \quad v_1 = w_1$$

ويمكن بسهولة إجراء عمليات جمع المتجهات والضرب في أعداد قياسية بدلالة المركبات . كما هو مبين في شكل ٣ - ٧ إذا كان

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2)$$



(شكل ٣ - ٦)



(شكل ٣ - ٧)

فإن

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

إذا كان $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ، $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$ أى عدد قياسي فإنه باستخدام المفاهيم الهندسية المتعلقة بالمثلثات المتماثلة يمكن أن نثبت (تمرين ١٤) أن

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$$

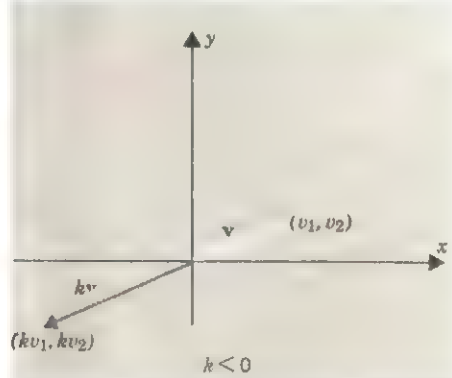
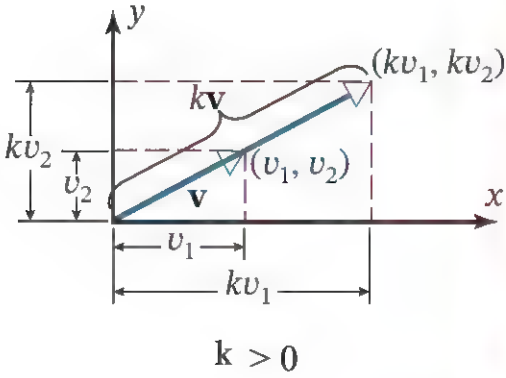
(أنظر شكل ٣-٨)

فمثلاً إذا كان $\mathbf{v} = (1, -2)$ ، $\mathbf{w} = (7, 6)$ فإن
 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

وكذا أنه يمكن تمثيل المتجهات في المستوى بأزواج من الأعداد الحقيقية فإن المتجهات في الفضاء الثلاثى يمكن تمثيلها بثلاثيات من الأعداد الحقيقية . بإدخال نظام إحداثيات متعامدة .

(شكل ٣-٨)

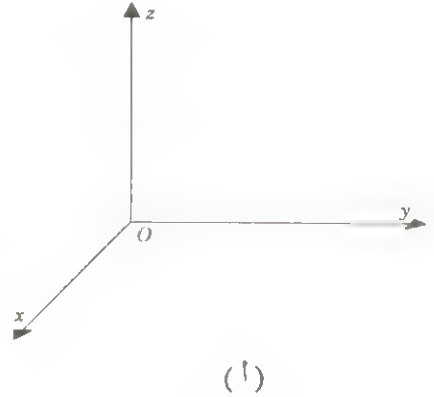
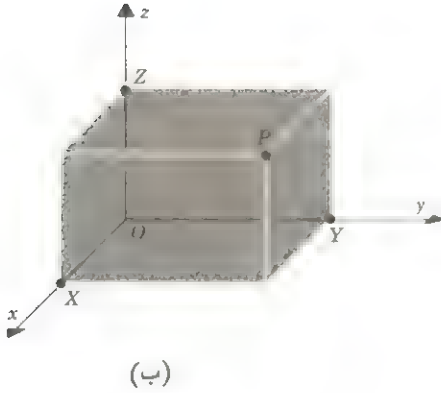


لإنشاء نظام الإحداثيات هذا ، اختر نقطة O تسمى بنقطة الأصل . ثم اختر ثلاثة مستويات متعامدة متنى متنى ، تسمى بمحاور الإحداثيات ، مارة بنقطة الأصل . عنون هذه المحاور x ، y ، z . ثم اختر اتجاهات موجبة يكون محور إحداثيات وأيضاً وحدة طول لقياس المسافات (شكل ٣-٩) ، يحدد كل زوج من محاور الإحداثيات مستوياً يسمى بمستوى الإحداثيات وهذه المستويات يشار إليها بمستوى xy ومستوى xz ومستوى yz . وتحدد لكل نقطة P في الفضاء الثلاثى ثلاثية من الأعداد (x, y, z) تسمى بإحداثيات P كما يلي .
 مرر ثلاثة مستويات بالنقطة P موازية لمستويات إحداثيات ثم ارمز لنقط تقاطع هذه المستويات مع محاور

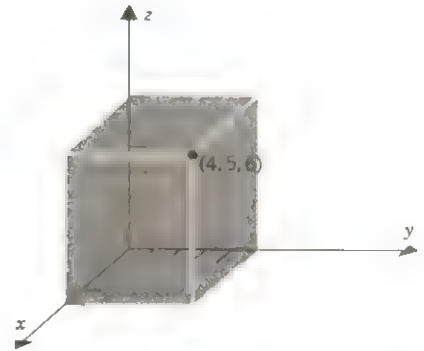
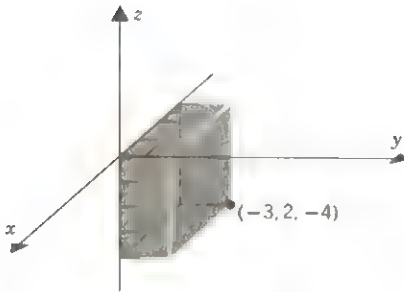
الأحداثيات الثلاثة بالرموز X و Y و Z (شكل ٣ - ٩ ب) تعرف إحداثيات P بأنها الأطوال المأخوذة بإشاراتها

$$x = OX \quad y = OY \quad z = OZ$$

في شكل ٣ - ١٠ وقعنا النقطتين اللتين إحداثياتهما $(4, 5, 6)$ و $(-3, 2, -4)$ ،

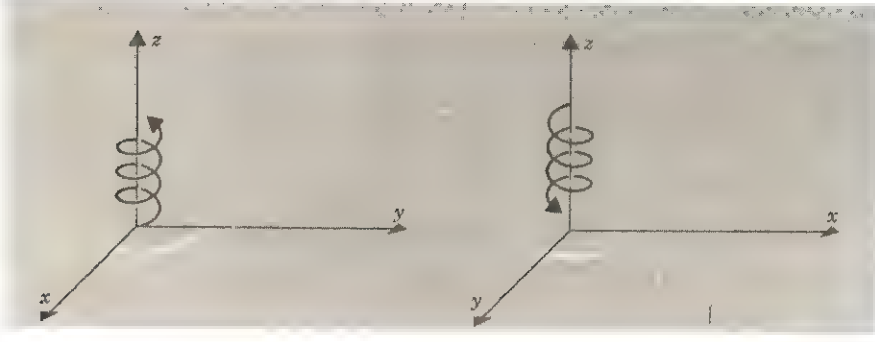


(شكل ٣ - ٩)



(شكل ٣ - ١٠)

تنقسم أنظمة الأحداثيات المتعامدة في الفضاء الثلاثي إلى قسمين وهما محاور اليد اليمنى ومحاور اليد اليسرى . يتميز نظام اليد اليمنى بأن البريمة العادية الموضوعة في الاتجاه الموجب لمحور z تسير إلى أعلى إذا دار الاتجاه الموجب لمحور x 90° إلى الاتجاه الموجب لمحور y (شكل ٣ - ١١ أ) . ويعتبر النظام ذويد يسرى إذا تراجعت إلى أسفل شكل ٣ - ١١ ب .



(ب) (أ)
(ب) محاور اليد اليسرى (أ) محاور اليد اليمنى (شكل ١١ - ٣)

في هذا الكتاب سوف نستخدم فقط أنظمة إحداثيات اليد اليمنى .
إذا وقع المتجه \mathbf{v} في الفضاء الثلاثي ، كما في (شكل ١٢ - ٣) ، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل لنظام إحداثيات معتمدة فإن إحداثيات نقطة النهاية تسمى بمركبات \mathbf{v} ونكتب

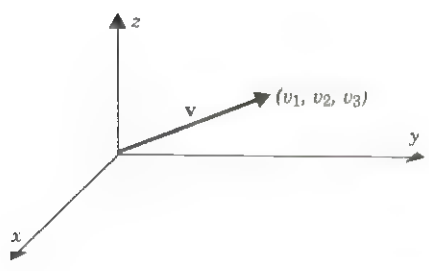
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

إذا كان $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ، $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ متجهين في الفضاء الثلاثي فيمكن بتطبيق برهان مماثل للبرهان المستعمل للمتجهات في المستوى إثبات النتائج التالية .

(١) \mathbf{v} و \mathbf{w} متكافئان إذا كان فقط إذا كان $v_1 = w_1$ ، $v_2 = w_2$ ، $v_3 = w_3$

(٢) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$

(٣) لأي عدد قياسي k $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$



(شكل ١٢ - ٣)

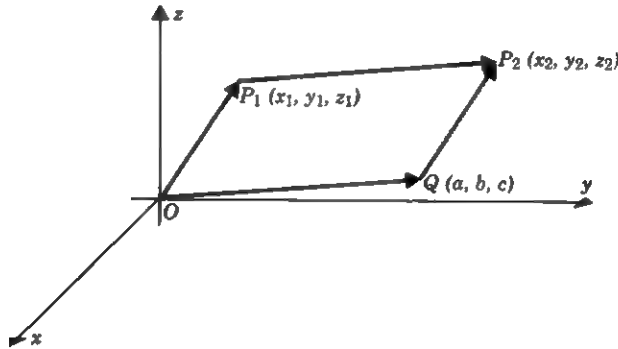
مثال (١) :

إذا كان $v = (1, -3, 2)$ و كان $w = (4, 2, 1)$ فإن

$$v + w = (5, -1, 3), \quad 2v = (2, -6, 4), \quad -w = (-4, -2, -1),$$

$$v - w = v + (-w) = (-3, -5, 1).$$

تظهر في بعض الأحيان متجهات نقطة البداية لها ليست عند نقطة الأصل . لايجاد مركبات متجه v نقطة بدايته هي $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $P_2(x_2, y_2, z_2)$ فإننا نكون متجهاً مكافئاً نقطة بدايته عند نقطة الأصل . (في شكل ٣-١٣) هو هذا المتجه . وإذا مركبات $\overline{P_1P_2} = v$ هي الأحداثيات (a, b, c) للنقطة Q .



(شكل ٣-١٣)

من شكل ٣-١٣ ، أو بدلالة المركبات $\overline{OQ} + \overline{OP_1} = \overline{OP_2}$ ،

$$(a, b, c) + (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\text{أو} \quad (a + x_1, b + y_1, c + z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

بمساواة المركبات المتناظرة والحل بالنسبة إلى a ، b و c نحصل على أن المركبات (a, b, c)

للمتجه $v = \overline{P_1P_2}$ تعطى كما يلي :

$$a = x_2 - x_1 \quad b = y_2 - y_1 \quad c = z_2 - z_1$$

مثال (٢) :

مركبات المتجه $v = \overline{P_1P_2}$ الذي نقطة بدايته $P_1(2, -1, 4)$ ونقطة نهايته $P_2(7, 5, -8)$ هي

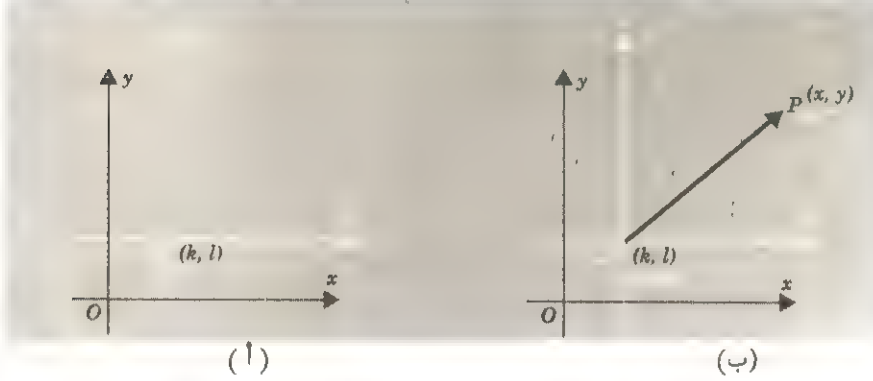
$$v = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12)$$

بالمثل في الفضاء الثلاثي مركبتا المتجه v الذي نقطة بدايته $P_1(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $P_2(x_2, y_2)$ هما

$$v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

مثال (٣) :

يمكن تبسيط حلول الكثير من المسائل بنقل محاور الإحداثيات للحصول على محاور جديدة موازية للمحاور الأصلية .



(شكل ١٤ - ٣)

في شكل ٣ - ١٤ أ نقل محوراً إحداثيات x ، y للحصول على نظام إحداثيات $x'y'$ نقطة الأصل له O' عند النقطة $(k, l) = (x, y)$. ويكون للنقطة P في الفضاء الثنائي الآن الإحداثيان (x, y) وأيضاً الإحداثيان (x', y') . لإيجاد العلاقة بينهما ، اعتبر المتجه $\overrightarrow{O'P}$ (شكل ٣ - ١٤ ب) . في نظام الإحداثيات $x'y'$ تكون النقطة بدايته عند (k, l) ونقطة نهايته عند (x, y) ، ومن ثم $\overrightarrow{O'P} = (x - k, y - l)$. في نظام الإحداثيات $x'y'$ تكون نقطة بدايته عند $(0, 0)$ ونقطة نهايته عند (x', y') ومن ثم $\overrightarrow{O'P} = (x', y')$. وإذن

$$x' = x - k \quad y' = y - l$$

تسمى هاتان المعادلتان بمعادلتى الانتقال .

وللتوضيح إذا كانت نقطة الأصل الجديدة عند $(k, l) = (4, 1)$ وكان الإحداثيان في النظام $x'y'$ للنقطة P هما $(2, 0)$ فإن الإحداثيين في النظام $x'y'$ للنقطة P هما

$$x' = 2 - 4 = -2 \quad y' = 0 - 1 = -1$$

في الفضاء الثلاثي تكون معادلات الانتقال هي

$$x' = x - k \quad y' = y - l \quad z' = z - m$$

حيث (k, l, m) هي الإحداثيات في النظام $x'y'z'$ لنقطة الأصل الجديدة .

تمارين ٣ - ١

١ - ارسم نظام إحداثيات يدعى وحدد مواقع النقاط التي إحداثياتها هي :

(١) (2, 3, 4)	(ب) (-2, 3, 4)	(ج) (2, -3, 4)	(د) (2, 3, -4)
(٥) (-2, -3, 4)	(و) (-2, 3, -4)	(ز) (2, -3, -4)	(ح) (-2, -3, -4)
(ط) (0, 2, 0)	(ى) (0, 0, -2)	(ك) (2, 0, 2)	(ل) (-2, 0, 0)

٢ - ارسم المتجهات التالية بحيث تكون نقطة بداياتهم عند نقطة الأصل :

(١) $v_1 = (2, 5)$	(ب) $v_2 = (-3, 7)$	(ج) $v_3 = (-5, -4)$
(د) $v_4 = (6, -2)$	(٥) $v_5 = (2, 0)$	(و) $v_6 = (0, -8)$
(ز) $v_7 = (2, 3, 4)$	(ح) $v_8 = (2, 0, 2)$	(ط) $v_9 = (0, 0, -2)$

٣ - أوجد مركبات المتجهات التي نقطة البداية لها P_1 ونقطة النهاية لها P_2

(١) $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$	(ب) $P_1(7, -2), P_2(0, 0)$
(ج) $P_1(6, 5, 8), P_2(8, -7, -3)$	(د) $P_1(0, 0, 0), P_2(-8, 7, 4)$

٤ - أوجد متجهاً تكون نقطة بدايته $P(2, -1, 4)$ وله نفس الاتجاه مثل المتجه $v = (7, 6, -3)$.

٥ - أوجد متجهاً يكون مائلاً في الاتجاه للمتجه $v = (-2, 4, -1)$ ونقطة نهايته $Q(2, 0, -7)$.

٦ - اعتبر أن $u = (1, 2, 3)$ ، $v = (2, -3, 1)$ ، $w = (3, 2, -1)$. أوجد مركبات

(١) $u - w$	(ب) $7v + 3w$	(ج) $-w + v$
(د) $3(u - 7v)$	(٥) $-3v - 8w$	(و) $2v - (u + w)$

٧ - اعتبر أن u, v, w هي متجهات تمرين (٦) . أوجد مركبات المتجه x الذي يحقق أن

$$2u - v + x = 7x + w.$$

٨ - اعتبر أن u, v, w هي متجهات تمرين (٦) . أوجد الأعداد القياسية c_1, c_2, c_3 بحيث يكون

$$c_1u + c_2v + c_3w = (6, 14, -2).$$

٩ - أثبت أنه لا توجد أعداد قياسية c_1, c_2, c_3 بحيث يكون

$$c_1(1, 2, -3) + c_2(5, 7, 1) + c_3(6, 9, -2) = (4, 5, 0).$$

١٠ - أوجد كل الأعداد القياسية c_1, c_2, c_3 بحيث يكون

$$c_1(2, 7, 8) + c_2(1, -1, 3) + c_3(3, 6, 11) = (0, 0, 0).$$

١١ - اعتبر أن P هي النقطة $(2, 3, -2)$ وأن Q هي النقطة $(7, -4, 1)$.

(أ) أوجد منتصف الخط المستقيم الواصل بين P و Q .

(ب) أوجد النقطة التي تقسم المسافة بنسبة $3/4$ من P إلى Q .

١٢ - افرض أن نظام الإحداثيات xy قد انتقل إلى نظام الإحداثيات $x'y'$ الذى نقطة الأصل له O' لها الإحداثيات $(2, -3)$.

- (أ) أوجد الإحداثيات $x'y'$ للنقطة P التى إحداثياتها xy هى $(7, 5)$.
 (ب) أوجد الإحداثيات xy للنقطة Q التى إحداثياتها $x'y'$ هى $(-3, 6)$.
 (ج) ارسم محاور الإحداثيات xy و $x'y'$ وحدد موقع النقطتين P ، Q .

١٣ - افرض أن نظام الإحداثيات xyz قد انتقل إلى نظام الإحداثيات $x'y'z'$ اعتبر أن v أى متجه له المركبات $(v_1, v_2, v_3) = v$ فى النظام xyz . أثبت أن v له نفس المركبات فى النظام $x'y'z'$.

١٤ - أثبت هندسياً أنه إذا كان $v = (v_1, v_2)$ فإن $kv = (kv_1, kv_2)$ (اقصر البرهان على الحالة $k > 0$ المبينة فى شكل ٣ - ٨ . يشمل البرهان الكامل كثيراً من الحالات التى تعتمد على الربع الذى يقع فيه المتجه وعلى إشارة k) .

٣ - ٢ مقياس المتجه . حساب المتجهات (العمليات الحسابية للمتجهات)

فى هذا القسم نوجد القواعد الأساسية لحساب المتجهات .

نظرية ١ :

إذا كان u ، v ، w متجهات فى فضاء ثنائى أو ثلاثى وكان k و l عددين قياسيين ، فإن العلاقات التالية تكون متحققة .

- (أ) $u + v = v + u$
 (ب) $(u + v) + w = u + (v + w)$
 (ج) $u + 0 = 0 + u = u$
 (د) $u + (-u) = 0$
 (هـ) $k(lu) = (kl)u$
 (و) $k(u + v) = ku + kv$
 (ز) $(k + l)u = ku + lu$
 (ح) $1u = u$

قبل مناقشة البرهان نلاحظ أننا قدمنا طريقتين لدراسة المتجهات : طريقة هندسية وتمثل فيها المتجهات كأسهم أو كخطوط مستقيمة متجهة ، وطريقة تحليلية . وتمثل فيها المتجهات كأزواج أو كثلاثيات من الأعداد تسمى بمركبات . وكنتيجة لهذا فإن نظرية (١) يمكن أن تثبت إما هندسياً وإما تحليلياً . ولتوضيح هذا سوف تثبت الجزء (ب) بالطريقتين . وسوف تترك بقية البراهين كتمرينات .

إثبات الجزء (ب) (تحليلياً) . سنعطى البرهان في حالة المتجهات في الفضاء الثلاثي . ويكون البرهان في الفضاء الثنائي ماثلاً . إذا كان $u = (u_1, u_2, u_3)$ ، $v = (v_1, v_2, v_3)$ ، $w = (w_1, w_2, w_3)$ فإن

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) \\&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\&= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, [u_3 + v_3] + w_3) \\&= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2], u_3 + [v_3 + w_3]) \\&= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\&= u + (v + w) \blacksquare\end{aligned}$$

إثبات الجزء (ب) (هندسياً) . اعتبر أن u, v, w تمثل بالمتجهات $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RS}$ كما هو مبين في شكل ١٥-٣ . فيكون

$$v + w = \overrightarrow{QS} \quad \text{و} \quad u + (v + w) = \overrightarrow{PS}$$

$$u + v = \overrightarrow{PR} \quad \text{و} \quad (u + v) + w = \overrightarrow{PS}$$

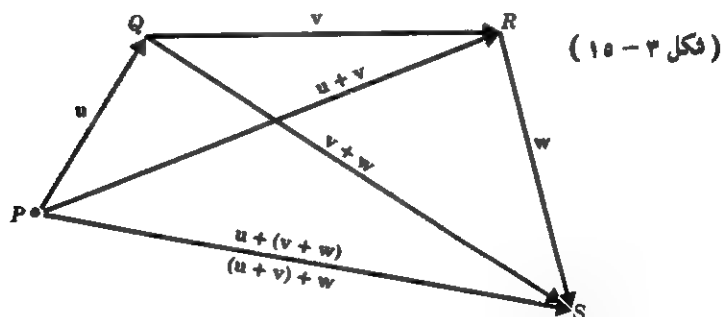
وأيضاً

$$u + (v + w) = (u + v) + w \blacksquare$$

وإذن

يسمى طول المتجه v عادة بمقياس v ويرمز له بالرمز $\|v\|$. ينتج من نظرية فيثاغورث أن مقياس المتجه $v = (v_1, v_2)$ في الفضاء الثنائي هو

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



(أنظر شكل ١٦-٣ أ) . اعتبر أن $v = (v_1, v_2, v_3)$ متجه في الفضاء الثلاثي . باستخدام شكل ١٦-٣ ب وبتطبيق نظرية فيثاغورث مرتين نحصل على

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= (OR)^2 + (RP)^2 \\&= (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2 \\&= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\end{aligned}$$

وإذن

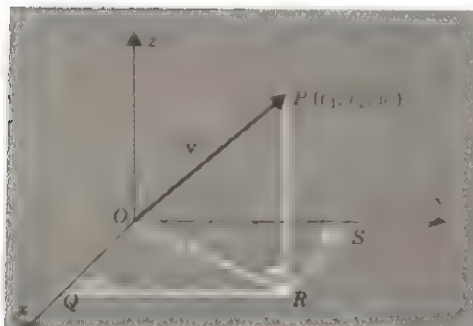
$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (3.1)$$

إذا كانت $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين في الفضاء الثلاثي فإن المسافة d بينهما تكون مقياس المتجه $\vec{P_1P_2}$ (شكل ٣-١٧) . وحيث أن

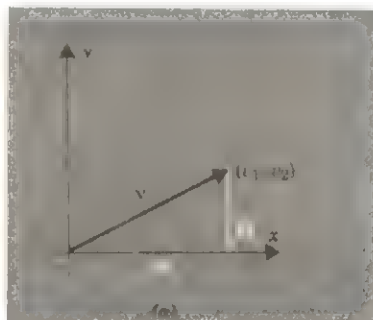
$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

فينتج من (3.1) أن

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

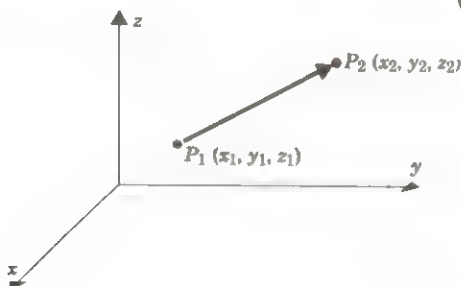


(ب)



(أ)

(شكل ٣-١٦)



(شكل ٣-١٧)

بالمثل إذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقطتين في الفضاء الثنائي فإن المسافة بينهما تعطى

بالقاعدة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال (٤) :

مقياس المتجه $v = (-3, 2, 1)$ هو

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

المسافة d بين النقطتين $P_1(2, -1, -5)$ و $P_2(4, -3, 1)$ هي

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

تمارين ٣ - ٢

١ - احسب مقياس v إذا كان

$$\begin{array}{lll} v = (0, -3) & \text{(ج)} & v = (-1, 7) & \text{(ب)} & v = (3, 4) & \text{(أ)} \\ v = (9, 0, 0) & \text{(و)} & v = (-8, 7, 4) & \text{(هـ)} & v = (1, 1, 1) & \text{(د)} \end{array}$$

٢ - احسب المسافة بين P_1 و P_2

$$\begin{array}{lll} P_1(-2, 7), & P_2(0, -3) & \text{(ب)} & P_1(2, 3), & P_2(4, 6) & \text{(أ)} \\ P_1(1, 1, 1), & P_2(6, -7, 3) & \text{(د)} & P_1(8, -4, 2), & P_2(-6, -1, 0) & \text{(ج)} \end{array}$$

٣ - اعتبر أن $u = (1, -3, 2)$ ، $v = (1, 1, 0)$ ، $w = (2, 2, -4)$. أوجد

$$\| -2u \| + 2\|u\| \quad \text{(ج)} \quad \|u\| + \|v\| \quad \text{(ب)} \quad \|u + v\| \quad \text{(أ)}$$

$$\left\| \frac{1}{\|w\|} w \right\| \quad \text{(و)} \quad \frac{1}{\|w\|} w \quad \text{(هـ)} \quad \|3u - 5v + w\| \quad \text{(د)}$$

٤ - أوجد جميع الكيات القياسية k بحيث يكون $\|kv\| = 3$ حيث $v = (1, 2, 4)$.

٥ - حقق الأجزاء (ب) ، (هـ) ، (و) ، (ز) من نظرية ١ إذا كان

$$l = 6 , k = -3 , w = (-8, 1, 2) , v = (6, 6, 9) , u = (1, -3, 7)$$

٦ - أثبت أنه إذا كان v غير صفري فإن مقياس $\frac{1}{\|v\|} v$ هو 1 .

٧ - استخدم تمرين ٦ لإيجاد متجه مقياسه 1 وله نفس اتجاه $v = (1, 1, 1)$.

٨ - اعتبر $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ و $p = (x, y, z)$. صف فئة جميع النقط (x, y, z) التي

$$\|p - p_0\| = 1 \quad \text{تحقق}$$

٩ - أثبت هندسياً أنه إذا كان u, v متجهين في الفضاء الثنائي أو الثلاثي فإن $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

١٠ - أثبت الأجزاء (أ) ، (ج) ، (هـ) من نظرية ١ تحليلياً .

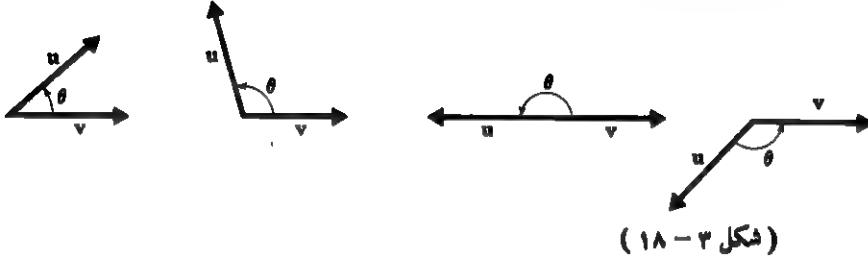
١١ - أثبت الأجزاء (د) ، (ز) ، (ح) من نظرية ١ تحليلياً .

١٢ - أثبت الجزء (و) من نظرية ١ هندسياً .

٣ - ٣ الضرب القياسي - المسقط

نقدم في هذا القسم نوعاً من أنواع ضرب المتجهات في الفضاء الثنائي والفضاء الثلاثي . ونبرهن الخواص الحسابية لهذا الضرب ونعطى بعض التطبيقات .

اعتبر أن u ، v متجهين غير صفريين في الفضاء الثنائي أو الفضاء الثلاثي ، وافترض أن هذين المتجهين قد وضعا بحيث تنطبق نقطتا البداية لهما . نمنى بالزاوية بين u و v الزاوية θ المحددة من u و v والتي تحقق $0 \leq \theta \leq \pi$ (شكل ٣ - ١٨) .



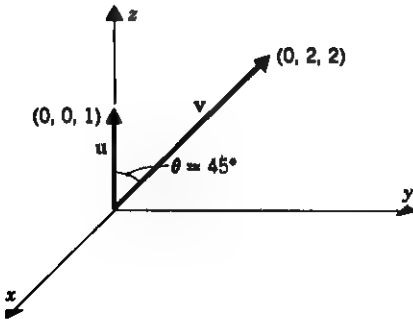
تعريف : إذا كان u ، v متجهين في الفضاء الثنائي أو الفضاء الثلاثي وكانت θ هي الزاوية بين u و v فإن الضرب القياسي أو الضرب الداخلي $u \cdot v$ يعرف بواسطة

$$u \cdot v = \begin{cases} \|u\| \|v\| \cos \theta, & u \neq 0 \text{ و } v \neq 0 \\ 0, & u = 0 \text{ أو } v = 0 \end{cases} \quad \text{إذا كان}$$

مثال (٥) :

كما هو مبين في شكل ٣ - ١٩ ، الزاوية بين المتجهين $u = (0, 0, 1)$ و $v = (0, 2, 2)$ تكون 45° . لذلك

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta = (\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2})(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2$$



(شكل ٣ - ١٩)

أعتبر $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ أى متجهين غير صفريين . إذا كانت θ ، كما في شكل ٣-٢٠ ، هى الزاوية بين \mathbf{u} ، \mathbf{v} فإن قانون جيب التمام يعطى

$$\|\overline{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \quad (3.2)$$

حيث أن $\overline{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ فيمكن إعادة كتابة (3.2) كما يلى :

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

أى

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

بإجراء التوسيعات الآتية :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

و

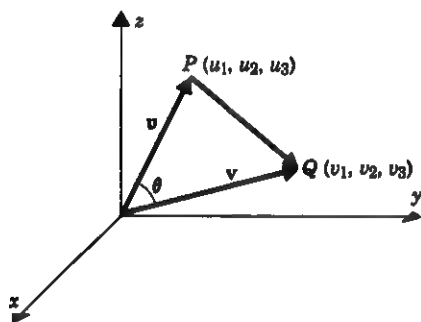
$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

نحصل بعد الاختصار على

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (3.3)$$

إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ متجهين فى الفضاء الثنائى ، فإن الصيغة المائلة للصيغة (3.3) تكون

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$



مثال (٦) :

أعتبر المتجهين

$$\mathbf{v} = (1, 1, 2) \quad \text{و} \quad \mathbf{u} = (2, -1, 1)$$

أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ وحدد الزاوية θ بين \mathbf{u} و \mathbf{v} .

الحل :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

$$\text{أيضا } \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6} \text{ ، لذلك فإن}$$

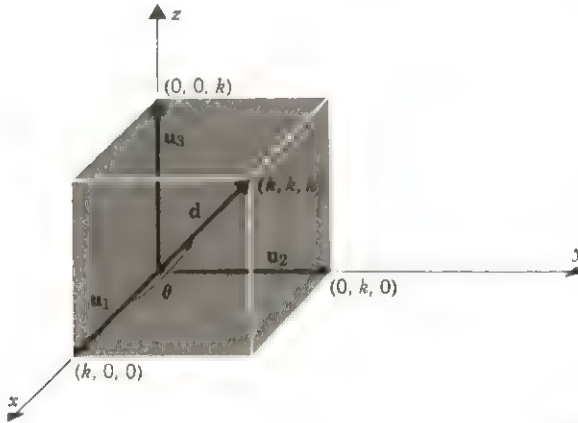
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{وإذن } \theta = 60^\circ$$

مثال (٧) :

أوجد الزاوية بين قطر المكعب وبين أى حرف من أحرف المكعب .

الحل : اعتبر أن k هو طول حرف المكعب ثم ادخل نظام إحداثيات كما هو مبين في شكل ٣ - ٢١ .



(شكل ٢ - ٢١)

إذا اعتبرنا أن $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$ ، $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$ ، $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$ فإن المتجه

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

يكون قطر المكعب . تحقق الزاوية θ بين \mathbf{d} وبين الحرف \mathbf{u} أن

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وإذن

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 54^\circ 44'.$$

تبين النظرية التالية كيف أن الضرب القياسي يمكن استخدامه للحصول على معلومات عن الزاوية بين متجهين وتعطى أيضاً علاقة هامة بين المقياس وبين الضرب القياسي .

نظرية ٢ :

اعتبر أن u, v متجهان في فضاء ثنائي أو فضاء ثلاثي .

$$(أ) \quad \|v\|^2 = v \cdot v \quad \text{أى أن} \quad \|v\| = (v \cdot v)^{1/2}$$

(ب) إذا كان u, v متجهين غير صفرين وكانت θ هي الزاوية بينهما فإن

- θ حادة إذا وفقط إذا كان $u \cdot v > 0$.
- θ منفرجة إذا وفقط إذا كان $u \cdot v < 0$.
- $\theta = \pi/2$ إذا وفقط إذا كان $u \cdot v = 0$.

الإثبات :

(أ) حيث أن الزاوية θ بين v, v هي صفر فيكون

$$v \cdot v = \|v\| \|v\| \cos \theta = \|v\|^2 \cos 0 = \|v\|^2$$

(ب) حيث أن $\|u\| > 0$ ، $\|v\| > 0$ وأيضاً $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$

إذن $u \cdot v$ له نفس الإشارة مثل $\cos \theta$. وحيث أن θ تحقق أن $0 \leq \theta \leq \pi$ فإن الزاوية θ تكون حادة إذا وفقط إذا كان $\cos \theta > 0$ ، وتكون θ منفرجة إذا وفقط إذا كان $\cos \theta < 0$ ، وتكون $\theta = \pi/2$ إذا وفقط إذا كان $\cos \theta = 0$.

مثال (٨) :

إذا كان $u = (1, -2, 3)$ ، $v = (-3, 4, 2)$ ، $w = (3, 6, 3)$ فإن

$$u \cdot v = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$

$$v \cdot w = (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$

$$u \cdot w = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0$$

لذلك فإن u, v تصنعان زاوية منفرجة ، w, v تصنعان زاوية حادة ويكون w, u متعامدين .

تشمل النظرية التالية الخواص الحسابية الأساسية للضرب القياسي .

نظرية ٣ : إذا كان u, v, w متجهات في فضاء ثنائي أو فضاء ثلاثي وكان k عدداً قياسياً فإن

$$(أ) \quad u \cdot v = v \cdot u$$

$$(ب) \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$(ج) \quad k(u \cdot v) = (ku) \cdot v = u \cdot (kv)$$

$$(د) \quad v \cdot v > 0 \text{ if } v \neq 0 \text{ and } v \cdot v = 0 \text{ if } v = 0$$

الإثبات : سنثبت (ج) للمتجهات في الفضاء الثلاثي وترك بقية الإثباتات كتمرينات .

$$\begin{aligned} \text{اعتبر } \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ و } \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ ، فيكون} \\ k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3 \\ &= (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\ k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

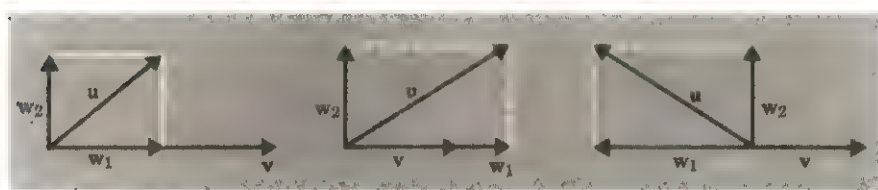
بالمثل

اعتماداً على الجزء (ب) من نظرية ٢ ، فإننا نعرف أن المتجهين \mathbf{u} ، \mathbf{v} متعامدان (ويكتب $(\mathbf{u} \perp \mathbf{v})$) إذا كان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. إذا اتفقنا أن المتجه الصفري يصنع زاوية $\pi/2$ مع أى متجه ، فيكون أى متجهين متعامدين إذا وفقط إذا كانا هندسياً متعامدين .

ويستفاد من الضرب القياسي في المسائل التي يكون فيها من المستحب تحليل المتجه إلى مجموع متجهين عموديين . إذا كان \mathbf{u} ، \mathbf{v} متجهين غير صفريين في فضاء ثنائي أو ثلاثي ، فيمكن دائماً كتابة \mathbf{u} على الصورة

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

حيث \mathbf{w}_1 مضاعف قياسي للمتجه \mathbf{v} و \mathbf{w}_2 عمودى على \mathbf{v} (شكل ٢٢ :) . يسمى المتجه \mathbf{w}_1 بالمسقط العمودى للمتجه \mathbf{u} على \mathbf{v} ويسمى المتجه \mathbf{w}_2 بمركبة \mathbf{u} العمودية على \mathbf{v} .



(شكل ٢٢ - ٣)

يمكن الحصول على المتجهين \mathbf{w}_1 ، \mathbf{w}_2 كما يلي . حيث أن \mathbf{w}_1 مضاعف قياسي للمتجه \mathbf{v} فيمكن كتابته على الصورة $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{v}$ وإذن

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2 \quad (3.4)$$

بضرب كل من طرفي (3.4) في \mathbf{v} وباستخدام نظريتي ٢ و ٣ نحصل على

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v} = k\|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}$$

وحيث أن \mathbf{w}_2 عمودى على \mathbf{v} ، فيكون $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$ وإذن هذه المعادلة تعطى

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

وحيث أن $w_1 = kv$ فنحصل على

$$w_1 = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v \quad \text{هو المسقط العمودي للمتجه } u \text{ على } v$$

وبحل $w_2 = u - w_1$ بالنسبة إلى w_2 نحصل على

$$w_2 = u - \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v \quad \text{مركبة } u \text{ العمودية على } v$$

مثال (٩) :

اعتبر المتجهين

$$v = (4, -1, 2) \quad \text{و} \quad u = (2, -1, 3)$$

حيث أن

$$u \cdot v = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

وأيضاً

$$\|v\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

فيكون المسقط العمودي للمتجه u على v هو

$$w_1 = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{15}{21} (4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

ومركبة المتجه u العمودية على v هي

$$w_2 = u - w_1 = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7} \right) = \left(\frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{11}{7} \right)$$

وللتأكد قد يرغب القارئ أن يتحقق من أن w_2 عمودي على v بإثبات إن $w_2 \cdot v = 0$.

تمارين ٣ - ٣

١ - أوجد $u \cdot v$ لكل من

$$\begin{aligned} (أ) \quad u &= (1, 2), v = (6, -8) & (ب) \quad u &= (-7, -3), v = (0, 1) \\ (ج) \quad u &= (1, -3, 7), v = (8, -2, -2) & (د) \quad u &= (-3, 1, 2), v = (4, 2, -5) \end{aligned}$$

٢ - في كل جزء من تمرين (١) ، أوجد جيب تمام الزاوية θ بين u ، v .

٣ - حدد ما إذا كان u ، v يصنعان زاوية حادة أو زاوية منفرجة أو متعامدين

$$\begin{aligned} (أ) \quad u &= (7, 3, 5), v = (-8, 4, 2) & (ب) \quad u &= (6, 1, 3), v = (4, 0, -6) \\ (ج) \quad u &= (1, 1, 1), v = (-1, 0, 0) & (د) \quad u &= (4, 1, 6), v = (-3, 0, 2) \end{aligned}$$

٤ - أوجد المسقط العمودي للمتجه u على v إذا كان

$$(أ) \quad u = (2, 1), v = (-3, 2) \quad (ب) \quad u = (2, 6), v = (-9, 3)$$

$$(ج) \quad u = (5, 0, 1), v = (-7, 1, 3) \quad (د) \quad u = (0, 0, 1), v = (8, 3, 4)$$

٥ - في كل جزء من تمرين (٤) أوجد مركبة u العمودية على v .

٦ - حقق نظرية ٣ عندما $u = (6, -1, 2)$ ، $v = (2, 7, 4)$ ، $k = -5$.

٧ - أوجد متجهين مقياسهما هو 1 بحيث يكونان عموديين على $(3, -2)$.

٨ - اعتبر أن $u = (1, 2)$ ، $v = (4, -2)$ ، $w = (6, 0)$. أوجد

$$(أ) \quad u \cdot (7v + w) \quad (ب) \quad \|u \cdot w\| \quad (ج) \quad \|u\| (v \cdot w) \quad (د) \quad (u \cdot v) \cdot w$$

٩ - فسر لماذا تعتبر كل من الصيغ التالية غير ذات معنى.

$$(أ) \quad u \cdot (v \cdot w) \quad (ب) \quad (u \cdot v) + w \quad (ج) \quad \|u \cdot v\| \quad (د) \quad k \cdot (u + v)$$

١٠ - استخدم المتجهات لإيجاد جيوب تمام الزوايا الداخلية للمثلث الذي رؤوسه $(-1, 0)$ ،

$$(1, 4) ، (-2, 1)$$

١١ - أثبت المتطابقة

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

١٢ - أثبت المتطابقة

$$u \cdot v = \frac{1}{2}\|u + v\|^2 - \frac{1}{2}\|u - v\|^2$$

١٣ - أوجد الزاوية بين قطر المكعب ووجه المكعب.

١٤ - جيوب التمام الاتجاهية للمتجه v في الفضاء الثلاثي هي الأعداد $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، $\cos \gamma$ حيث

α ، β ، γ هي الزوايا بين v وبين محاور x ، y ، z الموجبة. أثبت أنه إذا

كان $v = (a, b, c)$ فإن $\cos \alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ أوجد $\cos \beta$ ، $\cos \gamma$.

١٥ - أثبت أنه إذا كان v عمودياً على w_1 ، w_2 فإن v عمودى على $k_1 w_1 + k_2 w_2$ لأي أعداد

قياسية k_1 ، k_2 .

١٦ - اعتبر أن u ، v أى متجهين غير صفريين في الفضاء الثلاثي. إذا كان $\|u\| = k$ ،

$$\|v\| = l ، فأثبت أن المتجه$$

$$w = \frac{1}{k+l}(kv + lu)$$

ينصف الزاوية بين v ، u .

٣ - ٤ الضرب الاتجاهي

في كثير من تطبيقات المتجهات في مسائل الهندسة والطبيعة والعلوم الهندسية يكون من المفيد تكوين متجه في الفضاء الثلاثي بحيث يكون عمودياً على متجهين معطيين . نقدم في هذا القسم نوعاً من أنواع ضرب المتجهات ييسر هذا التكوين .

تعريف : إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ متجهين في الفضاء الثلاثي فإن الضرب الاتجاهي $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يكون هو المتجه المعروف بواسطة

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

أو بصورة المحددات

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

ملحوظة : يوجد رسم الصيغة 3.5 يكون مفيداً للتذكرة . إذا كنا المصفوفة من النوع 2×3

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

بحيث تكون مكونات الصف الأول هي مركبات العامل الأول \mathbf{u} ومكونات الصف الثاني هي مركبات العامل الثاني \mathbf{v} فيمكن الحصول على المركبة الأولى من $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ بحذف العمود الأول من المصفوفة ، ومحدد المركبة الثانية بحذف العمود الثاني من المصفوفة ، ومحدد المركبة الثالثة بحذف العمود الثالث من المصفوفة .

مثال (١٠) :

أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ حيث $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ ، $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

الحل :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2, -7, -6) \end{aligned}$$

بينما يكون الضرب القياسي لمتجهين هو عدد قياسي فإن الضرب الاتجاهي يكون متجهاً آخر . تعطي النظرية التالية علاقة هامة بين الضرب القياسي والضرب الاتجاهي وتبين أيضاً أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يكون عمودياً على كل من \mathbf{u} ، \mathbf{v} .

نظرية ٤ : إذا كان \mathbf{u}, \mathbf{v} متجهين في الفضاء الثلاثي فإن

$$[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \text{ عمودى على } \mathbf{u} \quad (أ)$$

$$[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \text{ عمودى على } \mathbf{v} \quad (ب)$$

$$[\text{مطابقة لاجرانج}] \quad \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (ج)$$

البرهان : اعتبر أن $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (أ)$$

(ب) بالمثل كما في (أ)

(ج) حيث أن

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \quad (3.6)$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

يمكن إثبات مطابقة لاجرانج بإجراء عمليات الضرب في الطرف الأيمن . بكل من (3.6) ، (3.7) والتحقق من تساوى الناتجين .

مثال (١١) :

اعتبر المتجهين

$$\mathbf{v} = (3, 0, 1) \quad \mathbf{u} = (1, 2, -2)$$

بيننا في مثال (١٠) أن :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

حيث أن

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

وأيضاً

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

فيكون $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودياً على كل من \mathbf{u}, \mathbf{v} كما هو مكفول بنظرية ٤ .

تشمل النظرية التالية الخواص الحسابية الأساسية للضرب الاتجاهي .

نظرية ه : إذا كان u, v, w أى ثلاثة متجهات فى الفضاء الثلاثى و k أى عدد قياسي فإن

$$u \times v = -(v \times u) \quad (أ)$$

$$u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w) \quad (ب)$$

$$(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w) \quad (ج)$$

$$k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv) \quad (د)$$

$$u \times 0 = 0 \times u = 0 \quad (هـ)$$

$$u \times u = 0 \quad (و)$$

تنتج البراهين مباشرة من الصيغة (3.5) ومن خواص المحددات ، فمثلا ، (أ) يمكن أن تثبت كما يلي :

الإثبات : (أ) بتبادل u, v فى (3.5) يتبادل الصفان فى كل من المحددات الثلاثة الموجودة بالطرف الايمن من (3.5) ، ومن ثم تتغير إشارة كل مركبة من الضرب الاتجاهى ، وعليه فإن $u \times v = -(v \times u)$.

تترك براهين بقية الأجزاء كتمارين .

مثال (١٢) :

اعتبر المتجهات

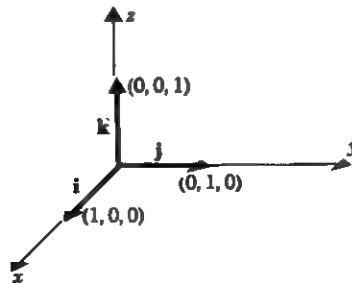
$$i = (1, 0, 0) \quad j = (0, 1, 0) \quad k = (0, 0, 1)$$

كل من هذه المتجهات طوله 1 وهى تقع على محاور الأحداثيات (شكل ٢ - ٢٣) وتسمى هذه المتجهات بمتجهات الوحدة القياسية فى الفضاء الثلاثى . ويمكن التعبير عن كل متجه $v = (v_1, v_2, v_3)$ فى الفضاء الثلاثى بدلالة i, j, k حيث أنه يمكننا أن نكتب

$$v = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1i + v_2j + v_3k$$

فمثلا

$$(2, -3, 4) = 2i - 3j + 4k$$



(شكل ٢ - ٢٣)

من (3.5) نحصل على

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

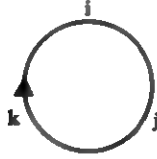
ومن السهل على القارئ الحصول على النتائج التالية :

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

يساعد الرسم التالى فى تذكر هذه النتائج



بالرجوع إلى هذا الرسم فإن حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين متتاليين فى اتجاه عقارب الساعة يكون هو المتجه التالى فى الدائرة ، ويكون حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين متتاليين فى اتجاه عكس عقارب الساعة هو المتجه التالى فى الدائرة بإشارة سالبة .

وجدير بالذكر أن الضرب الاتجاهى يمكن أن يمثل رمزياً على صورة المحدد من النوع 3×3

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

فإذا كان $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ ، $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ فإن

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

وهو ما يتفق مع النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال ١٠ .

تحذير : بوجه عام ليس من الصحيح أن $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ فمثلاً

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

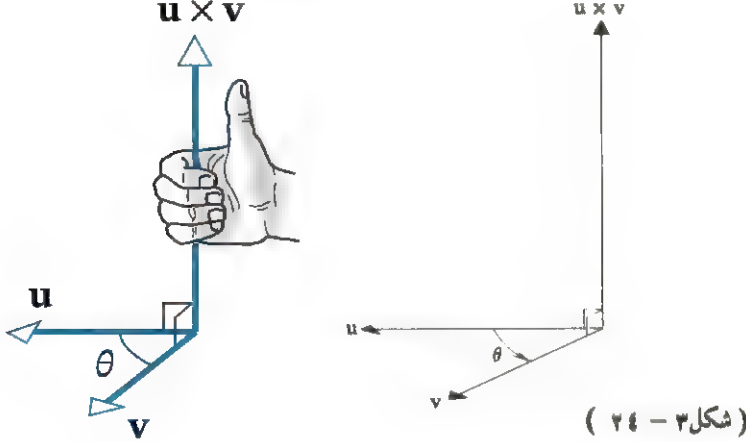
$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = -\mathbf{i}$$

وأيضاً

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$$

وإذن

نملم من نظرية ٤ أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودى على كل من \mathbf{u} ، \mathbf{v} . إذا كان \mathbf{u} ، \mathbf{v} متجهين غير صفريين فيمكن إثبات أن اتجاه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يمكن تحديده باستخدام قاعدة اليد اليمنى التالية * (شكل ٣ - ٢٤) . اعتبر θ هى الزاوية بين \mathbf{u} ، \mathbf{v} وافترض أن \mathbf{u} قد دار زاوية مقدارها θ حتى انطبق على \mathbf{v} . إذا ضمت أصابع اليد اليمنى بحيث تشير إلى اتجاه الدوران فإن الإبهام يحدد (تقريباً) اتجاه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$



قد يجد القارئ أنه من المفيد اختبار هذه القاعدة بحواصل الضرب

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

التي نوقشت في مثال ١٢ .

إذا كان \mathbf{u} ، \mathbf{v} متجهين غير صفريين في الفضاء الثلاثى فإن مقياس $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ له تفسير هندسى مفيد .
تنص متطابقة لاجرانج المعطاة في نظرية (٤) على أن

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (3.8)$$

إذا كانت θ ترمز إلى الزاوية بين \mathbf{u} ، \mathbf{v} فإن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ وإذن يمكن إعادة

كتابة (3.8) على الصورة

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

ومنها

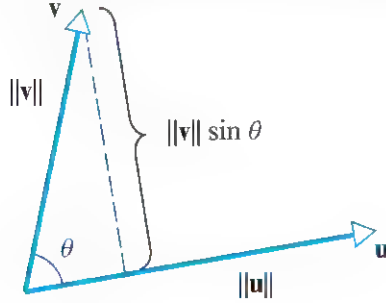
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \quad (3.9)$$

(*) تذكر أننا اتفقنا على اعتبار انظمة احداثيات اليد اليمنى في هذا المرجع . لو كنا استخدمنا انظمة اليد اليسرى بدلا منها لوجب استخدام قاعده اليد اليسرى هنا .

ولكن $\|v\| \sin \theta$ هو ارتفاع متوازي الأضلاع المحدد من u, v (شكل ٣ - ٢٥) . من (3.9) تعطى المساحة A لمتوازي الأضلاع هذا بالقاعدة

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta = (\text{القاعدة}) (\text{الارتفاع}) = A$$

وبعبارة أخرى فإن مقياس $u \times v$ يساوي مساحة متوازي الأضلاع المحدد من u, v .



(شكل ٣ - ٢٥)

مثال (١٣) :

أوجد مساحة المثلث المحدد بالنقط $P_1(2, 2, 0)$ ، $P_2(-1, 0, 2)$ و $P_3(0, 4, 3)$.

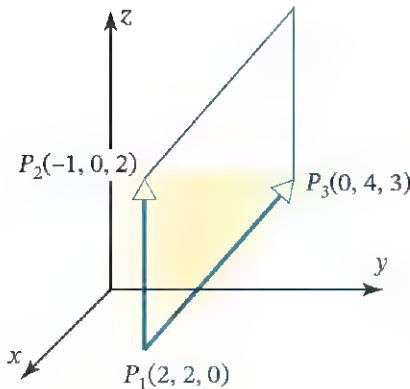
الحل : مساحة المثلث A هي نصف مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالمتجهين $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}$ (شكل ٣ - ٢٦) .

باستخدام الطريقة التي نوقشت في مثال (٢) من القسم (٣ - ١) يكون $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$ ، $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$ ، وينتج أن

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

وبالتالي فإن

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}(15) = \frac{15}{2}$$



(شكل ٣ - ٢٦)

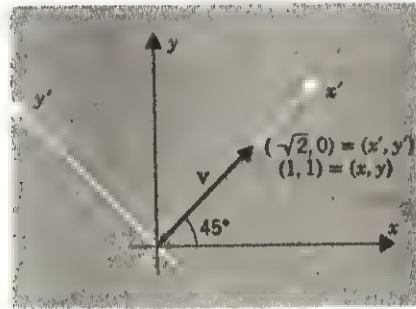
في البداية قد عرفنا المتجه بأنه جزء من خط مستقيم أو سهم له اتجاه في فضاء ثنائي أو فضاء ثلاثي ، ثم أدخلنا بعد ذلك أنظمة الإحداثيات والمركبات لتبسيط العمليات الحسابية للمتجهات . لذلك فللمتجه « وجود رياضي » بغض النظر عن إدخال نظام إحداثيات . بالإضافة إلى ذلك فإن مركبات متجه لا تتحدد من المتجه بمفرده ، ولكنها تعتمد أيضاً على نظام الإحداثيات المختار . فمثلاً في شكل ٣ - ٢٧ قد أشرنا إلى متجه ثابت v في المستوى وإلى نظامي إحداثيات مختلفين . مركبتا المتجه v في نظام الإحداثيات xy هما $(1, 1)$ وفي النظام $x'y'$ هما $(\sqrt{2}, 0)$.

وهذا يثير سؤالاً هاماً حول تعريفنا للضرب الاتجاهي . حيث أننا قد عرفنا الضرب الاتجاهي $u \times v$ بدلالة مركبات u ، v وحيث أن هذه المركبات تعتمد على نظام الإحداثيات المختار فقد يتخيل لنا أنه من الممكن أن يكون لمتجهين ثابتين u ، v حواصل ضرب اتجاهي مختلفة في أنظمة الإحداثيات المختلفة . لحسن الحظ أن هذا لا يحدث . لإثبات ذلك نحتاج فقط إلى تذكر أن :

$$(١) \quad u \times v \text{ عمود على كل من } u, v ,$$

$$(٢) \quad \text{يحدد اتجاه } u \times v \text{ باستخدام قاعدة اليد اليمنى}$$

$$(٣) \quad \|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$$



(شكل ٣ - ٢٧)

تحدد تماماً هذه الخواص الثلاثة المتجه $u \times v$ ، تحدد الخاصيتان (١) ، (٢) الاتجاه وتحدد الخاصية (٣) الطول . حيث أن هذه الخواص تعتمد فقط على الطول والموقع النسبي للمتجهين u ، v ولا تعتمد على نظام إحداثيات اليد اليمنى الخاص الذي يستخدم فإن المتجه $u \times v$ سيبقى بدون تغيير إذا أدخلنا نظام إحداثيات يد يميني مختلف . توصف هذه الحقيقة بالنص على أن تعريف $u \times v$ لا يعتمد على الإحداثيات . وتعتبر هذه النتيجة مهمة للفيزيائيين والمهندسين الذين يتعاملون عادة مع الكثير من أنظمة الإحداثيات في المسألة الواحدة .

مثال (١٤) :

اعتبر متجهين متعامدين u ، v طول كل منهما 1 (كما هو مبين في شكل ٣ - ٢٨ أ) . إذا أدخلنا نظام إحداثيات xyz كما هو مبين في شكل ٣ - ٢٨ ب فإن

$$v = (0, 1, 0) = j \quad , \quad u = (1, 0, 0) = i$$

وإذن :

$$u \times v = i \times j = k = (0, 0, 1)$$

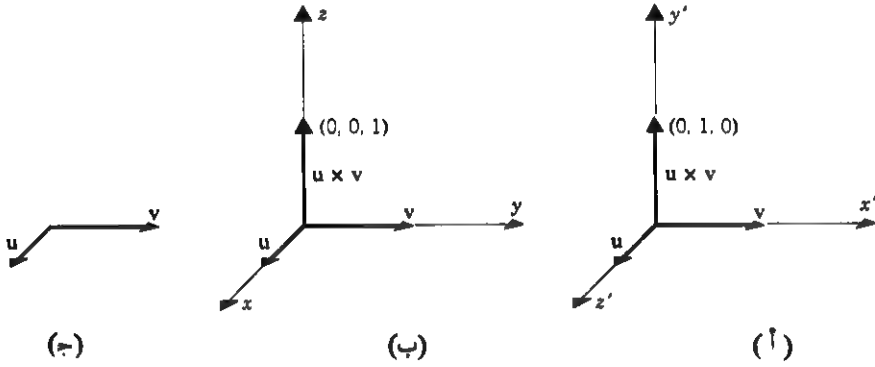
ومن جهة أخرى إذا أدخلنا نظام إحداثيات $x'y'z'$ كما هو مبين في شكل ٣ - ٢٨ ج فإن

$$v = (1, 0, 0) = i \quad , \quad u = (0, 0, 1) = k$$

وإذن

$$u \times v = k \times i = j = (0, 1, 0)$$

ولكن واضح من الشكلين ٣ - ٢٨ ب ، ج أن المتجه $(0, 0, 1)$ في النظام xyz هو نفسه المتجه $(0, 1, 0)$ في النظام $x'y'z'$. إذن نحصل على نفس المتجه $u \times v$ إذا حسبنا بإحداثيات النظام xyz أو بإحداثيات النظام $x'y'z'$.



(شكل ٣ - ٢٨)

تمارين ٣ - ٤

١ - اعتبر $w = (1, 4, 5)$ ، $v = (0, 1, 7)$ ، $u = (2, -1, 3)$ احسب

$$\begin{array}{lll} (u \times v) \times w & \text{(ج)} & u \times (v \times w) & \text{(ب)} & v \times w & \text{(أ)} \\ (u \times v) - 2w & \text{(د)} & u \times (v - 2w) & \text{(هـ)} & (u \times v) \times (v \times w) & \text{(ز)} \end{array}$$

٢ - أوجد في كل جزء متجهها عموديا على كل من u ، v

$$(أ) \quad u = (-7, 3, 1) \quad v = (2, 0, 4)$$

$$(ب) \quad u = (-1, -1, -1) \quad v = (2, 0, 2)$$

٣ - أوجد في كل جزء مساحة المثلث الذي رؤوسه R, Q, P

$$(أ) \quad P(1, 5, -2) \quad Q(0, 0, 0) \quad R(3, 5, 1)$$

$$(ب) \quad P(2, 0, -3) \quad Q(1, 4, 5) \quad R(7, 2, 9)$$

٤ - حقق نظرية ϵ للمتجهين $u = (1, -5, 6)$ و $v = (2, 1, 2)$.

٥ - حقق نظرية ϵ عندما $u = (2, 0, -1)$ ، $v = (6, 7, 4)$ ، $w = (1, 1, 1)$ ، $k = -3$.

٦ - ما هو الخطأ في التعبير $u \times v \times w$ ؟

٧ - اعتبر $u = (-1, 3, 2)$ ، $w = (1, 1, -1)$. أوجد جميع المتجهات x التي تحقق $u \times x = w$.

٨ - اعتبر $u = (u_1, u_2, u_3)$ ، $v = (v_1, v_2, v_3)$ ، $w = (w_1, w_2, w_3)$ أثبت أن

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

٩ - استخدم نتيجة تمرين ٨ لحساب $u \cdot (v \times w)$ عندما $u = (-1, 4, 7)$ ، $v = (6, -7, 3)$ ، $w = (4, 0, 1)$.

١٠ - اعتبر m و n متجهين بحيث تكون مركباتهما في النظام xyz لشكل ٣ - ٢٨ هي $n = (0, 1, 0)$ ، $m = (0, 0, 1)$

(أ) أوجد مركبات m و n في النظام $x'y'z'$ لشكل ٣ - ٢٨ .

(ب) احسب $m \times n$ باستخدام المركبات في النظام xyz .

(ج) احسب $m \times n$ باستخدام المركبات في النظام $x'y'z'$.

(د) أثبت أن المتجهين الذين حصلنا عليهما في (ب) ، (ج) هما نفس المتجه .

١١ - أثبت المتطابقتين الآتيتين :

$$(أ) \quad (u + kv) \times v = u \times v$$

$$(ب) \quad (u \times v) \cdot z = u \cdot (v \times z)$$

١٢ - اعتبر u, v, w متجهات غير صفيرية في الفضاء الثلاثي بحيث - يرتبط أى اثنين منهما خطياً .
أثبت أن :

(أ) يقع $u \times (v \times w)$ في المستوى المحدد من u, v, w (يفرض أن المتجهات قد وضعت بحيث يكون لها نفس نقطة البداية) .

(ب) يقع $(u \times v) \times w$ في المستوى المحدد من u, v, w .

١٣ - أثبت أن $x \times (y \times z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$.

[إرشاد : أثبت أولاً النتيجة عندما $z = i = (1, 0, 0)$ ثم عندما $z = j = (0, 1, 0)$ وبعد ذلك عندما $z = k = (0, 0, 1)$ أخيراً أثبت النتيجة لأى متجه إختياري $z = (z_1, z_2, z_3)$ بكتابة $z = z_1 i + z_2 j + z_3 k$.

١٤ - أثبت الجزئين (أ) ، (ب) من نظرية هـ .

١٥ - أثبت الجزئين (ج) ، (د) من نظرية هـ .

١٦ - أثبت الجزئين (هـ) ، (و) من نظرية هـ .

٣ - ٥ المستقيمت والمستويات في الفضاء الثلاثي

في هذا القسم سوف نستخدم المتجهات لاشتقاق معادلات المستقيمت والمستويات في الفضاء الثلاثي . وسوف نستخدم أيضاً هذه المعادلات لحل بعض المسائل الأساسية في الهندسة .

في الهندسة التحليلية المستوية يمكن تحديد المستقيم باعطاء ميله وإحدى نقطه . بالمثل يمكن تحديد المستوى في الفضاء الثلاثي باعطاء اتجاهه وإحدى نقطه . ومن الطرق الملائمة لوصف الاتجاه هي أن نحدد متجهها (يسمى العمودى) وهو الذى يكون عمودياً على المستوى .

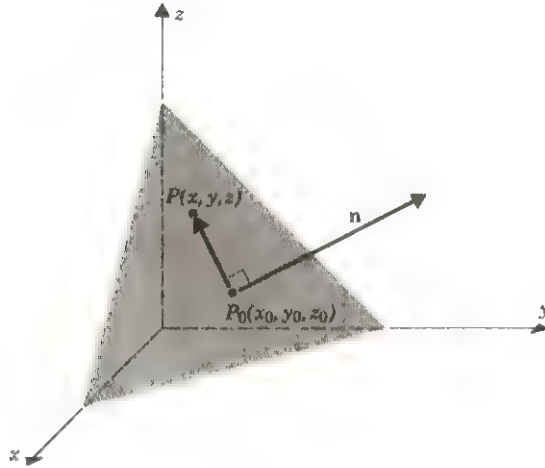
نفرض أننا نريد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة $p_0(x_0, y_0, z_0)$ ويكون العمودى له هو المتجه غير الصفري $n = (a, b, c)$. واضح من شكل ٣ - ٢٩ أن المستوى يتكون بالتحديد من تلك النقط $P(x, y, z)$ التى يكون لها المتجه $\overrightarrow{P_0P}$ عمودياً على n أى التى تحقق

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad (3.10)$$

حيث أن $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ فإن (3.9) يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (3.11)$$

نسعى هذه الصورة بصورة النقطة والعمودى لمعادلة المستوى .



(شكل ٣-٢٩)

مثال (١٥) :

أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة $(3, -1, 7)$ ويكون عموديا على المتجه $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$

الحل : من (3.11) صورة النقطة والعمودى هى

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$

باجراء عمليات الضرب وتجميع الحدود يمكن إعادة كتابة (3.11) على الصورة

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (3.12)$$

حيث a, b, c, d ثوابت وأيضا a, b, c ليست كلها أصفارا . للتوضيح فإن المعادلة

الموجودة فى مثال ١٥ يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

كما تبين لنا النظرية التالية فإن كل معادلة على الصورة (3.12) تمثل مستويا فى الفضاء الثلاثى .

نظرية ٦ : إذا كانت a, b, c, d ثوابت وأيضاً a, b, c ليست كلها أصفاراً فإن الشكل
البياني للمعادلة :

$$ax + by + cz + d = 0$$

هو مستوى يكون المتجه $\mathbf{n} = (a, b, c)$ عمودياً له .

البرهان : من الفرض a, b, c ليست كلها أصفاراً . نفرض ، في هذه اللحظة ، أن $a \neq 0$.
يمكن إعادة كتابة المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ على الصورة $a(x + d/a) + by + cz = 0$.
ولكن هذه هي صورة النقطة والعمودى لمعادلة مستوى يمر بنا لنقطة $(-d/a, 0, 0)$ وله المتجه $\mathbf{n} = (a, b, c)$ عمودياً عليه .

إذا كانت $a = 0$ فإنه إما $b \neq 0$ أو $c \neq 0$ ويمكن بتعديل مباشر للبرهان السابق معالجة هذه الحالات الأخرى .

المعادلة (3.12) هي معادلة خطية في x, y, z وتسمى الصورة العامة لمعاد المستوى .
كما أن حلول نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} ax + by &= k_1 \\ cx + dy &= k_2 \end{aligned}$$

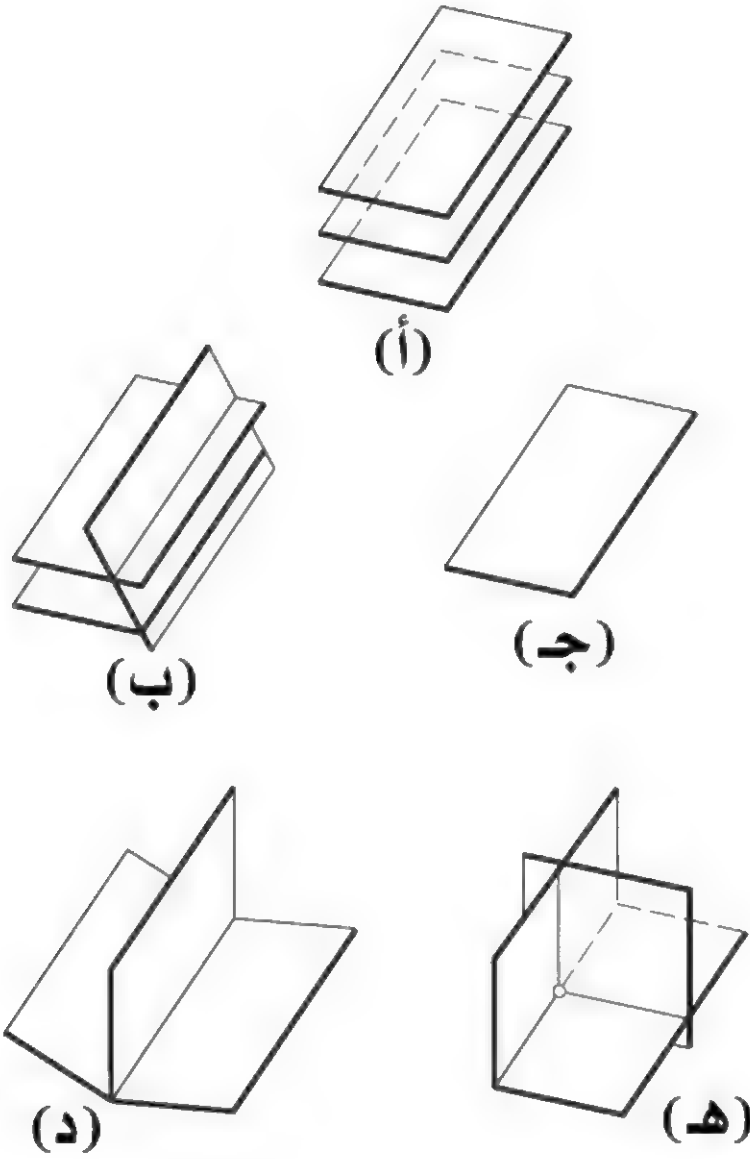
تتناظر نقط تقاطع الخطين المستقيمين $ax + by = k_1$ و $cx + dy = k_2$ في المستوى xy ،
فإن حلول النظام

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k_1 \\ dx + ey + fz &= k_2 \\ gx + hy + iz &= k_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

تتناظر نقط تقاطع المستويات

$$ax + by + cz = k_1, \quad dx + ey + fz = k_2, \quad gx + hy + iz = k_3$$

في شكل ٣ - ٣٠ قد أوضحنا بعض الاحتمالات الهندسية عندما يكون النظام (3.13) له صفر من
الحلول أو حل واحد أو عدد لا نهائى من الحلول .



(شكل ٣-٣٠) : (أ) لا توجد حلول (ثلاثة مستويات متوازية) .

(ب) لا توجد حلول (مستويان متوازيان) .

(ج) عدد لا نهائي من الحلول (ثلاثة مستويات منطبقه) .

(د) عدد لا نهائي من الحلول (ثلاثة مستويات متقاطعة في خط مستقيم) .

(هـ) حل واحد (ثلاثة مستويات متقاطعة في نقطة)

مثال (١٦) :

أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقط $P_1(1, 2, -1)$ ، $P_2(2, 3, 1)$ ، $P_3(3, -1, 2)$
الحل : بما أن النقط الثلاث تقع في المستوى فإن إحداثياتها يجب أن تحقق المعادلة العامة للمستوى . لهذا

$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ 2a + 3b + c + d &= 0 \\ 3a - b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$a = -\frac{9}{16}t \quad b = -\frac{1}{16}t \quad c = \frac{5}{16}t \quad d = t$$

بأخذ $t = -16$ مثلا نحصل على المعادلة المطلوبة

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

نلاحظ أن أى اختيار آخر لقيمة t يعطى مضاعفا لهذه المعادلة . لذلك فإن أى قيمة $t \neq 0$ تعطى المعادلة المطلوبة .

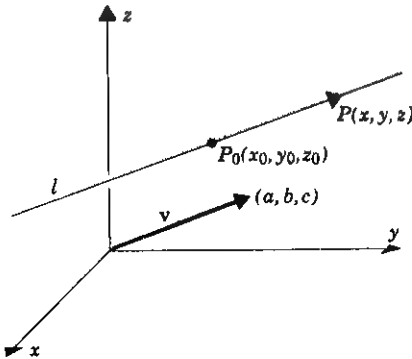
حل آخر : حيث أن $P_1(1, 2, -1)$ ، $P_2(2, 3, 1)$ ، $P_3(3, -1, 2)$ تقع في المستوى فإن المتجهين $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 2)$ و $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, -3, 3)$ يوازيان المستوى لهذا فإن $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (9, 1, -5)$ يكون عموديا على المستوى حيث أنه عمودى على كل من $\overrightarrow{P_1P_2}$ ، $\overrightarrow{P_1P_3}$ من هذا ومن حقيقة أن P_1 تقع في المستوى فإن صورة النقطه والعمودى لمعادلة المستوى تكون

$$9(x - 1) + (y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

أى :

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

سنبين الآن كيفية الحصول على معادلات المستقيمت في الفراغ الثلاثى . نفرض أن l مستقيم في الفراغ الثلاثى يمر بالنقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ويوازي المتجه غير الصفري $\mathbf{v} = (a, b, c)$ من الواضح (شكل ٣ - ٣١) أن l تتكون بالذات من تلك النقط $P(x, y, z)$ التى يكون لها المتجه $\overrightarrow{P_0P}$



(شكل ٣ - ٣١)

يوازي \mathbf{v} أى التى يوجد لها عدد قياسى t بحيث يكون

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \quad (3.14)$$

يمكن كتابة (3.14) بدلالة المركبات كالتالى :

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

ومن هذا ينتج أن

$$-\infty < t < +\infty$$

حيث

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}$$

نسمى هذه المعادلات بالمعادلات البارامترية للمستقيم l حيث أن المستقيم l يرسم بالنقطة $P(x, y, z)$ إذا تغير البارامتر (الدليل) t من $-\infty$ إلى $+\infty$.

مثال (١٧) :

يكون للمستقيم المار بالنقطة $(1, 2, -3)$ والموازي للمتجه $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$ المعادلات البارامترية

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 2 + 5t \\ z &= -3 - 7t \end{aligned} \quad \text{حيث} \quad -\infty < t < +\infty$$

مثال (١٨) :

(أ) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم l المار بالنقطتين $P_1(2, 4, -1)$ ، $P_2(5, 0, 7)$.

(ب) أين يقطع المستقيم المستوى xy ؟

الحل : (أ) حيث أن المتجه $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -4, 8)$ مواز للمستقيم l وأن $P_1(2, 4, -1)$ تقع على l ، فإن المستقيم l يعطى بالمعادلات

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 4 - 4t \\ z &= -1 + 8t \end{aligned} \quad \text{حيث} \quad -\infty < t < +\infty$$

(ب) يقطع المستقيم المستوى xy فى النقطة $z = -1 + 8t = 0$

أى عندما $t = 1/8$ بالتعويض بهذه القيمة عن t في المعادلات البارامترية للمستقيم l نجد أن نقطة التقاطع هي :

$$(x, y, z) = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{2}, 0\right)$$

مثال (١٩) :

أوجد المعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين

$$3x + 2y - 4z - 6 = 0 \quad \text{و} \quad x - 3y - 2z - 4 = 0$$

الحل : يتكون خط التقاطع من جميع النقط (x, y, z) التي تحقق المعادلتين في النظام

$$3x + 2y - 4z = 6$$

$$x - 3y - 2z = 4$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$x = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t \quad y = -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t \quad z = t$$

وتكون المعادلات البارامترية للمستقيم l تبعا لذلك هي

$$\begin{aligned} x &= \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t \\ y &= -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t \\ z &= t \end{aligned} \quad \text{حيث} \quad -\infty < t < +\infty$$

في بعض المسائل يعطى خطا مستقيما

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \quad \text{حيث} \quad -\infty < t < +\infty \quad (3.15)$$

ويكون من المفيد إيجاد مستويين يتقاطعان في المستقيم المعطى . حيث أنه يوجد عدد لا نهائى من المستويات المارة بالمستقيم لذلك يوجد دائما عدد لا نهائى من هذه الأزواج من المستويات . لإيجاد مستويين من تلك المستويات عندما تكون الثوابت a ، b ، c جميعها مختلفة عن الصفر ، يمكننا إعادة كتابة كل معادلة من (3.15) على الصورة

$$\frac{x - x_0}{a} = t \quad \frac{y - y_0}{b} = t \quad \frac{z - z_0}{c} = t$$

حذف البارامتر t يبين أن المستقيم يتكون من جميع النقط (x, y, z) التي تحقق المعادلات

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

والتي نسمى بالمعادلات المماثلة المستقيم . لذلك يمكن اعتبار المستقيم كتقاطع المستويين

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{و} \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

أو كتقاطع المستويين

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{و} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

وهكذا .

مثال (٢٠) :

أوجد مستويين بحيث يكون خط تقاطعهما هو المستقيم

$$x = 3 + 2t$$

$$-\infty < t < +\infty$$

حيث

$$y = -4 + 7t$$

$$z = 1 + 3t$$

الحل : حيث أن المعادلات المماثلة لهذا الخط المستقيم هي

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 4}{7} = \frac{z - 1}{3} \quad (3.16)$$

فيكون المستقيم هو تقاطع المستويين

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 4}{7} \quad \text{و} \quad \frac{y + 4}{7} = \frac{z - 1}{3}$$

أو بصيغة مكافئة

$$3y - 7z + 19 = 0 \quad \text{و} \quad 7x - 2y - 29 = 0$$

ويمكن الحصول على حلول أخرى باختيار أزواج معادلات أخرى من (3.16) .

تمارين ٣ - ٥

١ - أوجد في كل جزء صورة النقطة والعمودى لمعادلة المستوى المار بالنقطة P والذي له المتجه \mathbf{n} كعمودى .

$$P(-1, -1, 2); \mathbf{n} = (-1, 7, 6) \quad (\text{ب})$$

$$P(2, 6, 1); \mathbf{n} = (1, 4, 2) \quad (\text{أ})$$

$$P(0, 0, 0); \mathbf{n} = (2, 3, 4) \quad (\text{د})$$

$$P(1, 0, 0); \mathbf{n} = (0, 0, 1) \quad (\text{ج})$$

٢ - اكتب معادلات المستويات في تمرين ١ في الصورة العامة .

٣ - أوجد صورة النقطة والعمودى لكل من :

$$x + 3z = 0 \quad (\text{ب})$$

$$2x - 3y + 7z - 10 = 0 \quad (\text{أ})$$

٤ - أوجد في كل جزء معادلة المستوى الذي يمر بالنقط المعطاة

$$\begin{array}{lll} (أ) & (0, 2, 3) & (1, 0, -1) \\ (ب) & (2, 1, -1) & (-1, 3, 2) \end{array}$$

٥ - أوجد في كل جزء المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة P ويوازي n .

$$\begin{array}{ll} (أ) & P(2, 4, 6); n = (1, 2, 5) \\ (ب) & P(-3, 2, -4); n = (5, -7, -3) \\ (ج) & P(1, 1, 5); n = (0, 0, 1) \\ (د) & P(0, 0, 0); n = (1, 1, 1) \end{array}$$

٦ - أوجد المعادلات المتماثلة للمستقيمين في (أ) ، (ب) بتمرين ٥.

٧ - أوجد في كل جزء المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقط المعطاة.

$$(أ) (6, -1, 5), (7, 2, -4) \quad (ب) (0, 0, 0), (-1, -1, -1)$$

٨ - أوجد في كل جزء المعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين المعطيين.

$$\begin{array}{ll} (أ) & -2x + 3y + 7z + 2 = 0 \\ (ب) & 3x - 5y + 2z = 0 \end{array}$$

٩ - أوجد في كل جزء معادلتى مستويين بحيث يكون خط تقاطعهما هو المستقيم المعطى.

$$\begin{array}{ll} (أ) & -\infty < t < +\infty \\ (ب) & -\infty < t < +\infty \end{array}$$

١٠ - أوجد معادلات كل من المستوى xy والمستوى xz والمستوى yz .

١١ - أثبت أن المستقيم

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{array} \quad -\infty < t < +\infty$$

(أ) يقع في المستوى $6x + 4y - 4z = 0$.

(ب) يوازي ويقع أسفل المستوى $5x - 4y + 3z = 1$.

(ج) يوازي ويقع أعلى المستوى $6x + 2y - 2z = 3$.

١٢ - أوجد نقطة تقاطع المستقيم

$$\begin{array}{l} x - 4 = 5t \\ y + 2 = t \\ z - 4 = -t \end{array}$$

مع المستوى $3x - y + 7y + 8 = 0$.

١٣ - أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (2,-7,6) ويوازي المستوى

$$5x - 2y + z - 9 = 0.$$

١٤ - أثبت أن المستقيم

$$\begin{aligned} x - 4 &= 2t \\ y &= -t \\ z + 1 &= -4t \end{aligned} \quad -\infty < t < +\infty$$

يوازي المستوى $3x + 2y + z - 7 = 0$.

١٥ - أثبت أن المستقيمين

$$\begin{aligned} x + 1 &= 4t & x + 13 &= 12t \\ y - 3 &= t & y - 1 &= 6t \\ z - 1 &= 0 & z - 2 &= 3t \end{aligned}$$

متقاطعان . أوجد نقطة التقاطع .

١٦ - أوجد معادلة المستوى الذي يتحدد من مستقيمي تمرين ١٥

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة .

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

٤- الفضاء الإقليدي

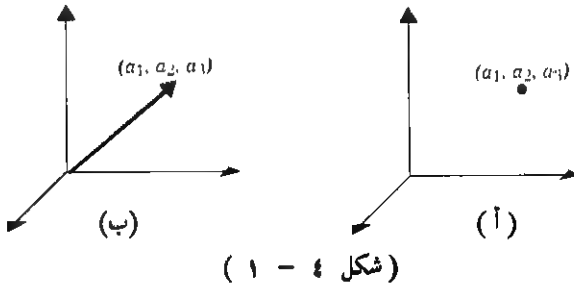
٤ - ١ الفضاء الإقليدي النوني :

إن فكرة استخدام أزواج الأعداد لتحديد مواضع النقط في المستوى وثلاثيات الأعداد لتحديد مواضع النقط في الفضاء الثلاثي قد ظهرت لأول مرة بوضوح في منتصف القرن السابع عشر . وفي الجزء الأخير من القرن التاسع عشر بدأ الرياضيون والفيزيائيون إدراك أنه لا يوجد ما يدعو للتوقف عند الثلاثيات . فلقد لوحظ أن رباعيات الأعداد (a_1, a_2, a_3, a_4) يمكن أن تعتبر نقطا في فضاء « رباعي الأبعاد » ، وخماسيات الأعداد $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ نقطا في فضاء « خماسي الأبعاد » . وهلم جرا . وعلى الرغم من أن رؤيتنا الهندسية لا تتعدى الفضاء الثلاثي ، لكن من الممكن أن يعمم الكثير من الأفكار المألوفة إلى ما بعد الفضاء الثلاثي وذلك باستخدام الخواص التحليلية والعديدية للنقط والمتجهات بدلا من الخواص الهندسية . وفي هذا القسم سوف نجعل هذه الأفكار أكثر تحديدا .

تعريف : إذا كان n عددا صحيحاً موجباً ، فإن القوس النوني المرتب هو متتابعة من n من الأعداد الحقيقية (a_1, a_2, \dots, a_n) . تسمى فئة جميع الأقواس النونية المرتبة بفضاء نوني ويرمز لها بالرمز R^n .

(عندما تكون $n=2$ أو $n=3$ فن المعتاد استخدام المصطلح « زوج مرتب » و « ثلاثية مرتبة » بدلا من قوس ثنائي مرتب وقوس ثلاثي مرتب) .

قد يكون قد اتضح للقارئ عند دراسته للفضاء الثلاثي أن الرمز (a_1, a_2, a_3) له تفسيران هندسيان مختلفان . يمكن تفسيره كنقطة ، وفي هذه الحالة تكون a_1, a_2, a_3 هي الإحداثيات (شكل ٤ - ١ أ) أو يمكن أن يفسر كتجه ، وفي هذه الحالة تكون a_1, a_2, a_3 هي المركبات (شكل ٤ - ١ ب) . لهذا ينتج أن القوس النوني المرتب (a_1, a_2, \dots, a_n) يمكن أن ينظر له « كتعميم للنقطة » أو « كتعميم للتجه » ويكون الاختلاف رياضيا غير ذي بال . لذلك يمكننا بحرية أن نصف القوس الخماسي $(-2, 4, 0, 1, 6)$ أما كنقطة في R^5 أو كتجه في R^5 وسوف نستعمل كلا من الوصفين .



تعريف : يقال أن المتجهين $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ في الفضاء R^n متساويان إذا كان

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

ويعرف المجموع $u + v$ كما يأتي :

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

وإذا كان k أى عدد قياسي فإن المضاعف القياسي ku يعرف كما يلي :

$$ku = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

تسمى عمليتا الجمع والضرب في عدد قياسي ، في هذا التعريف ، بالعمليتين القياسيتين على R^n .
نعرف المتجه الصفري في R^n بأنه المتجه

$$0 = (0, 0, \dots, 0)$$

إذا كان $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ أى متجه في R^n فإن سالب u أو (مكوس u بالنسبة للجمع) يرمز له بالرمز $-u$ ويعرف كما يلي :

$$-u = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

ونعرف طرح المتجهات في R^n هكذا $v - u = v + (-u)$

أو بدلالة المركبات .

$$\begin{aligned} v - u &= v + (-u) = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \\ &= (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \dots, v_n - u_n) \end{aligned}$$

وتشمل النظرية التالية أكثر الخواص الحسابية أهمية للجمع والمضاعفات القياسية للمتجهات في R^n .
والبراهين جميعها سهلة ونتركها كتمارين .

نظرية ١ : إذا كان $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ، $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ،
متجهات في R^n وكان k ، l عددين قياسيين فإن

$$u + v = v + u \quad (أ)$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w \quad (ب)$$

$$u + 0 = 0 + u = u \quad (ج)$$

$$u + (-u) = 0, \text{ أى } u - u = 0 \quad (د)$$

$$k(lu) = (kl)u \quad (هـ)$$

$$k(u + v) = ku + kv \quad (و)$$

$$(k + l)u = ku + lu \quad (ز)$$

$$1u = u \quad (ح)$$

تمكننا هذه النظرية من التعامل مع متجهات R^n بدون التعبير عن المتجهات بدلالة المركبات ، بنفس الطريقة التي نتعامل بها مع الأعداد الحقيقية . فمثلا لحل معادلة المتجهات $x + u = v$ بالنسبة إلى x ، يمكننا إضافة $-u$ إلى كل من الطرفين ثم نكمل كما يلي :

$$\begin{aligned}(x + u) + (-u) &= v + (-u) \\ x + (u - u) &= v - u \\ x + 0 &= v - u \\ x &= v - u\end{aligned}$$

قد يجد القارئ أنه من المفيد الإشارة إلى أجزاء نظرية ١ التي تحقق خطوات هذه الحسابات .

لتعميم مفاهيم المسافة والمقياس والزوايا إلى R^n ، نبدأ بالتعميم التالى للضرب القياسى فى R^2 ، R^3 (قسم ٣ - ٣) .

تعريف : إذا كان $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ أى متجهين فى R^n فإن الضرب الداخلى الإقليدى $u \cdot v$ يعرف هكذا

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

لاحظ أنه عندما $n = 2$ أو $n = 3$ ، فإن الضرب الداخلى الإقليدى يصبح الضرب القياسى العادى (قسم ٣ - ٣) .

مثال (١) :

حاصل الضرب الداخلى الإقليدى للمتجهين

$$v = (5, -4, 7, 0) \quad \text{و} \quad u = (-1, 3, 5, 7)$$

فى R^4 هو

$$u \cdot v = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18$$

تشمل النظرية التالية الخواص الحسابية الأساسية للضرب الداخلى الإقليدى .

نظرية ٢ : إذا كان u, v, w متجهات فى R^n وكان k أى عدد قياسى فإن :

$$u \cdot v = v \cdot u \quad (أ)$$

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad (ب)$$

$$(ku) \cdot v = k(u \cdot v) \quad (ج)$$

$$v \cdot v \geq 0 \text{ بالإضافة إلى ذلك } v \cdot v = 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } v = 0. \quad (د)$$

سنثبت الجزئين (ب) ، (د) ونترك إثبات الباقي كتمرينات .

الإثبات (ب) : اعتبر أن $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ، $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ فيكون :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n) \\&= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \dots + (u_n + v_n)w_n \\&= (u_1w_1 + u_2w_2 + \dots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n) \\&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\end{aligned}$$

(د) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq 0$. بالإضافة إلى ذلك فإن المتساوية تتحقق إذا وفقط إذا كان $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ أي إذا وفقط إذا كان $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$.

مثال (٢) :

تسمح لنا نظرية ٢ بإجراء العمليات الحسابية الخاصة بالضرب الداخلي الإقليدي بنفس الطريقة تماماً التي تجرى بها العمليات الحسابية الخاصة بالضرب الحسابي العادي . فمثلاً :

$$\begin{aligned}(3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\&= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u}) + (3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u}) + (2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\&= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 8(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\&= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 11(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\end{aligned}$$

على القارئ أن يحدد أى جزء من نظرية ٢ قد استخدم في كل خطوة .

بالرجوع إلى الصيغ المعروفة في R^2 ، R^3 ، فإننا نعرف المقياس الإقليدي (أو الطول الإقليدي) للمتجه $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ في الفضاء R^n بأنه

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

بالمثل فإن المسافة الإقليدية بين النقطتين $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ تعرف بأنها

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

مثال (٣) :

إذا كان $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$ ، $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$ فإن

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

وأيضاً

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 7)^2 + (-2 - 2)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{58}$$

حيث أن الكثير من الأفكار المعروفة من الفضاء الثنائي والفضاء الثلاثي قد عمت ، فن المعتاد أن نشير إلى R^n مع عمليات الجمع والضرب في أعداد قياسية والضرب الداخلي ، التي عرفت الآن ، بأنه الفضاء الإقليدي النوني .

نهي هذا القسم بملاحظة أن كثيرا من الكتاب يفضلون استخدام الرمز بالمصفوفة

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

بدلا من الرمز الأق $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ليدل على المتجهات في R^n ويبرر ذلك أن عمليات المصفوفات

$$u + v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

$$ku = k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{bmatrix}$$

تعمل نفس النتائج مثل عمليات المتجهات

$$u + v = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$ku = k(u_1, u_2, \dots, u_n) = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

ويكون الفرق الوحيد هو أن النتائج تكتب رأسية في حالة منهما وأفقية في الحالة الأخرى . وسوف نستخدم كلا الرمز من حين إلى آخر . إلا أننا من الآن فصاعدا نرمز للمصفوفات من النوع $n \times 1$ بحروف صغيرة مميزة . فنظام المعادلات الخطية سيكتب

$$Ax = b$$

بدلا من $AX = B$ كما كان يكتب من قبل .

تمارين ٤ - ١

١ - اعتبر $u = (2, 0, -1, 3)$ ، $v = (5, 4, 7, -1)$ ، $w = (6, 2, 0, 9)$ أوجد

$$\begin{array}{lll} \text{(أ)} & u - v & \text{(ب)} & 7v + 3w \\ \text{(ج)} & -w + v & \text{(د)} & 3(u - 7v) \\ \text{(و)} & 2v - (u + w) & \text{(هـ)} & -3v - 8w \end{array}$$

٢ - اعتبر u, v, w هي متجهات تمرين ١. أوجد المتجه x الذى يحقق المعادلة $2u - v + x = 7x + w$.

٣ - اعتبر $u_1 = (-1, 3, 2, 0)$ ، $u_2 = (2, 0, 4, -1)$ ، $u_3 = (7, 1, 1, 4)$ ،

$u_4 = (6, 3, 1, 2)$ أوجد أعداداً قياسية c_1, c_2, c_3, c_4 بحيث يكون

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 = (0, 5, 6, -3)$$

٤ - بين أنه لا توجد أى أعداد قياسية c_1, c_2, c_3 بحيث يكون

$$c_1(1, 0, -2, 1) + c_2(2, 0, 1, 2) + c_3(1, -2, 2, 3) = (1, 0, 1, 0)$$

٥ - احسب المقياس الإقليدى للمتجه v إذا كان

$$(أ) v = (4, -3) \quad (ب) v = (1, -1, 3) \quad (ج) v = (2, 0, 3, -1) \quad (د) v = (-1, 1, 1, 3, 6)$$

٦ - اعتبر $u = (3, 0, 1, 2)$ ، $v = (-1, 2, 7, -3)$ ، $w = (2, 0, 1, 1)$. أوجد

$$(أ) \|u + v\| \quad (ب) \|u\| + \|v\| \quad (ج) \|-2u\| + 2\|u\|$$

$$(أ) \|3u - 5v + w\| \quad (ب) \frac{1}{\|w\|} w \quad (و) \left\| \frac{1}{\|w\|} w \right\|$$

٧ - أثبت أنه إذا كان v متجهاً غير صفري في R^n فإن مقياس $(1/\|v\|)v$ هو 1 .

٨ - أوجد جميع الأعداد القياسية k بحيث يكون $\|kv\| = 3$ حيث $v = (-1, 2, 0, 3)$.

٩ - أوجد حاصل الضرب الداخلى الأقليمى $u \cdot v$ عندما

$$(أ) u = (-1, 3), v = (7, 2) \quad (ب) u = (3, 7, 1), v = (-1, 0, 2)$$

$$(ج) u = (1, -1, 2, 3), v = (3, 3, -6, 4) \quad (د) u = (1, 3, 2, 6, -1), v = (0, 0, 2, 4, 1)$$

١٠ - (أ) أوجد متجهين في R^2 المقياس الأقليمى لكل منهما هو 1 وبحيث يكون حاصل الضرب الداخلى

الأقليمى لكل منهما مع $(-2, 4)$ هو الصفر .

(ب) أثبت أنه يوجد عدد لانهاى من المتجهات في R^3 المقياس الأقليمى لأى منهما هو 1 وبحيث

يكون حاصل الضرب الداخلى الأقليمى لأى منهما مع $(-1, 7, 2)$ هو الصفر .

١١ - أوجد المسافة الأقليمية بين u, v عندما يكون

$$(أ) u = (2, -1), v = (3, 2) \quad (ب) u = (1, 1, -1), v = (2, 6, 0)$$

$$(ج) u = (2, 0, 1, 3), v = (-1, 4, 6, 6) \quad (د) u = (6, 0, 1, 3, 0), v = (-1, 4, 2, 8, 3)$$

١٢ - أثبت المتطابقة

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

لمتجهات R^n . فسر هذه النتيجة هندسياً في R^2 .

١٣ - أثبت المتطابقة

$$u \cdot v = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2$$

لمتجهات R^n .

١٤ - حقق الأجزاء (ب) ، (هـ) ، (و) ، (ز) من نظرية (١) عندما يكون

$$u = (1, 0, -1, 2), v = (3, -1, 2, 4), w = (2, 7, 3, 0), k = 6, \text{ and } l = -2$$

١٥ - حقق الجزئين (ب) ، (ج) من نظرية (٢) لقيم u, v, w, k الموجودة في تمرين (١٤).

١٦ - أثبت (أ) بواسطة (د) في نظرية (١).

١٧ - أثبت (هـ) بواسطة (ح) في نظرية (١).

١٧ - أثبت (هـ) بواسطة (ح) في نظرية (١)

١٨ - أثبت (أ) ، (ج) في نظرية (٢).

٤ - ٢ الفضاء الخطي العام

في هذا القسم سنعمم مفهوم المتجه إلى درجة أبعد. سنذكر مجموعة من الفروض التي إذا تحققت لأي مجموعة من الأشياء يميز لها أن تسمى متجهات. وسنختار الفروض بتجريد الخواص الأكثر أهمية للمتجهات في R^n ، وكنتيجه لـ هـ فإن متجهات R^n ستحقق هذه الفروض تلقائياً. لهذا فإن مفهومنا الجديد عن المتجهات سوف يتضمن المتجهات التي عرفناها من قبل وأيضاً الكثير من الأنواع الجديدة من المتجهات.

تعريف : اعتبر أن V فئة اختيارية من الأشياء معرف عليها عمليتان ، الجمع والضرب في أعداد قياسية (أعداد حقيقية) . ونقصد بالجمع قاعدة تعطي لكل زوج من الأشياء u, v من V عنصراً $u + v$ يسمى بمجموع u, v ونقصد بالضرب في أعداد قياسية قاعدة تعطي لكل عدد قياسي k ولكل شيء u من V عنصراً ku يسمى بالمضاعف القياسي للشيء u بواسطة k . إذا تحققت الفروض التالية لجميع الأشياء u, v, w وجميع الأعداد القياسية k, l فإننا نسمى V بفضاء خطي ونسمى الأشياء الموجودة في V بمتجهات :

١ - إذا كان u و v شيئين من V فإن $u + v$ من V .

٢ - $u + v = v + u$.

٣ - $u + (v + w) = (u + v) + w$.

٤ - يوجد شيء هو 0 من V بحيث يكون $0 + u = u + 0 = u$ لكل u من V .

٥ - لكل u من V يوجد شيء هو $-u$ من V ويسمى بسالب u بحيث يكون $u + (-u) = (-u) + u = 0$.

٦ - إذا كان k أى عدد حقيقي وكان u أى شيء من V فإن ku يكون من V .

٧ - $k(u + v) = ku + kv$

٨ - $(k + l)u = ku + lu$

٩ - $k(lu) = (kl)(u)$

١٠ - $lu = u$

المتجه 0 في الفرض (٤) يسمى بالمتجه الصفري للفضاء V .

قد يكون من الضروري في بعض التطبيقات أن نتداول فضاءات خطية بحيث تكون الأعداد القياسية أعداداً مركبة بدلاً من أعداد حقيقية ، مثل هذه الفضاءات الخطية تسمى بالفضاءات الخطية المركبة . ولكن في هذا المرجع ستكون جميع الأعداد القياسية حقيقية .

يجب أن يتنبه القارئ إلى أنه في تعريف الفضاء الخطي لا يوجد تخصيص لطبيعة المتجهات أو للعاملين . أى نوع من الأشياء مهما كانت يمكن أن تصلح كمتجهات وكل ما هو مطلوب هو أن تتحقق فروض الفضاء الخطي . وسوف تعطى الأمثلة التالية بعض التصور عن عدد الأشكال للفضاءات الخطية الممكنة .

مثال (٤) :

الفضاء $V = R^n$ مع العمليتين القياسيتين للجمع والضرب في أعداد قياسية المعرفتين في القسم السابق تكون فضاءاً خطياً . ينتج الفرضان (١) ، (٦) من التعريف القياسي للعمليات في R^n وتنتج بقية الفروض من نظرية ١ .

مثال (٥) :

اعتبر V أى مستوى يمر بنقطة الأصل في R^3 . سنثبت أن جميع النقاط في V تكون فضاء خطياً بالنسبة إلى العمليتين القياسيتين للجمع والضرب في أعداد قياسية للمتجهات في R^3 .

نعلم من مثال ٤ أن R^3 فضاء خطي بالنسبة إلى هاتين العمليتين . لذلك فإن الفروض (٢) ، (٣) ، (٧) ، (٨) ، (٩) ، (١٠) تتحقق لجميع نقاط R^3 ومن ثم لجميع النقاط في المستوى V . لذلك نحتاج فقط إلى إثبات أن الفروض (١) ، (٤) ، (٥) ، (٦) متحققة .

حيث أن المستوى يمر بنقطة الأصل فتكون معادلته على الصورة

$$ax + by + cz = 0 \quad (4.1)$$

(نظرية ٦ بالباب الثالث) . فإذا كان $u = (u_1, u_2, u_3)$ ، $v = (v_1, v_2, v_3)$ نقطتين من V ، فإن $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ وأيضاً $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. جمع هاتين المعادلتين يعطى

$$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

نخبرنا هذه المتساوية بأن إحداثيات النقطة $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ تحقق (4.1) ، لهذا فإن $u + v$ تقع في المستوى V . هذا يثبت أن الفرض (١) متحقق . بضرب $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ في -1 نحصل على

$$a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$$

وإذن $-u = (-u_1, -u_2, -u_3)$ تقع في V . وهذا يحقق الفرض (٥) . تحقيق الفرضين (٤ ، ٦) نتركه كتمرينين .

مثال (٦) :

تكون النقط الواقعة على مستقيم V يمر بنقطة الأصل في R^3 فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين القياسيتين للجمع والضرب في أعداد قياسية لمتجهات R^3 .

يشبه البرهان ذلك البرهان المستخدم في تمرين (٥) ويعتمد على حقيقة أن نقط V تحقق معادلات بارامترية على الصورة

$$x = at$$

$$y = bt \quad -\infty < t < +\infty$$

$$z = ct$$

(قسم ٣ - ٥) . ونترك التفاصيل كتمرين .

مثال (٧) :

افئة V امكونة من جميع المصفوفات من النوع $m \times n$ بمكونات حقيقية مع عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية للمصفوفات تكون فضاءاً خطياً . المصفوفة الصفريّة من النوع $m \times n$ تكون هي المتجه الصفري 0 . وإذا كن المتجه u هو المصفوفة A من النوع $m \times n$ فإن المصفوفة $-A$ تكون هي المتجه $-u$ في الفرض (٥) . تتحقق معظم الفروض الباقية باستخدام نظرية (٢) في القسم (١ - ٥) . سنرمز لهذا الفضاء الخطي بالرمز M_{mn} .

مثال (٨) :

اعتبر أن V هو الفئة امكونة من جميع الدوال الحقيقية المعرفة على الخط المستقيم الحقيقي بأكنه . إذا كانت

$$f = f(x) \text{ و } g = g(x) \text{ أي دالتين منها وكان } k \text{ أي عدد حقيقي فإننا نعرف دالة المجموع } f + g$$

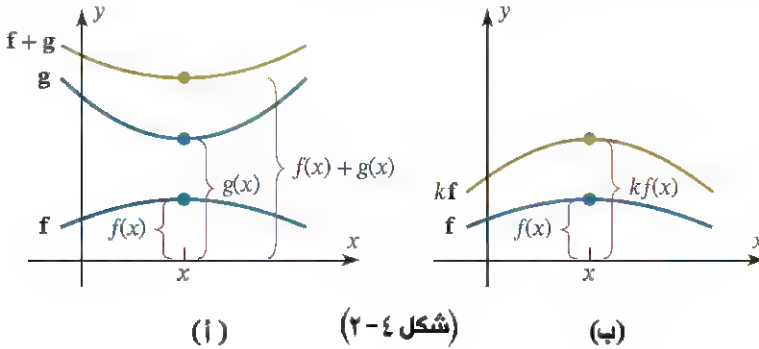
والمضاعف القياسي kf كما يلي :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

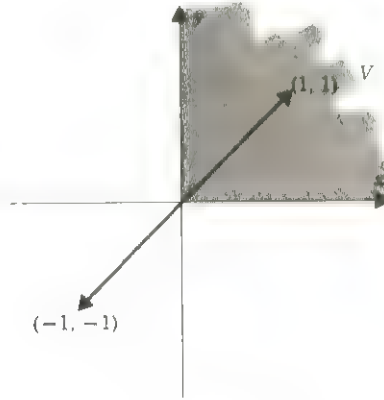
وبعبارة أخرى فإن قيمة الدالة $f + g$ عند x نحصل عليها بجمع قيمتي f و g عند x (شكل ٤ - ٢ أ) .
بالمثل قيمة kf عند x هي k من المرات لقيمة f عند x (شكل ٤ - ٢ ب) . تكون الفئة V فضاءاً خطياً بالنسبة إلى هاتين العمليتين .

ويكون المتجه الصفري لهذا الفضاء هو الدالة الثابتة الصفريّة ، أي هي الدالة التي يكون رسمها البياني هو المستقيم الأفقيّ المار بنقطة الأصل . ويعتبر تحقيق بقية الفرضيات تمريناً .



مثال (٩) :

اعتبر أن V هي فئة جميع النقط (x, y) في R^2 التي تقع في الربع الأول ، أي بحيث يكون $x \geq 0$ ، $y \geq 0$. تفشل الفئة V في أن تكون فراغاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين القياسيتين على R^2 ، حيث أن الفرضين ٥ ، ٦ غير متحققين . لإثبات هذا لاحظ أن $v = (1, 1)$ يقع في V بينما $-v = (-1, -1)$ لا يقع (شكل ٣ - ٤) .



(شكل ٣ - ٤)

مثال (١٠) :

اعتبر أن V تتكون من شيء واحد والذي نرمز له بالرمز 0 ، وعرف

$$0 + 0 = 0$$

$$k0 = 0$$

لأي عدد قياسي k . من السهل اختبار تحقق جميع فروض الفضاء الخطي . يسمى هذا بالفضاء الخطي الصفري .

وكلما نتقدم سنضيف أمثلة أخرى للفضاءات الخطية . ونختم هذا القسم بنظرية تعطي قائمة مفيدة لخواص المتجهات .

نظرية ٣ : اعتبر V فضاءاً خطياً ، u متجه من V ، k عدد قياسي ، فيكون

$$0u = 0 \quad (أ)$$

$$k0 = 0 \quad (ب)$$

$$(-1)u = -u \quad (ج)$$

$$u = 0 \text{ إذا كان } ku = 0 \text{ فإن } k = 0 \text{ أو } u = 0 \quad (د)$$

الإثبات : سنثبت الجزئين (أ) ، (ج) ونترك إثبات الجزئين الباقيين كتمرين .

$$(أ) \text{ يمكننا كتابة } 0u + 0u = (0 + 0)u \quad (\text{الفرض ٨})$$

$$= 0u \quad (\text{إحدى خواص العدد } 0)$$

من الفرض (٥) يكون للمتجه $0u$ متجه سالب $-0u$. بإضافة هذا السالب إلى كل من الطرفين السابقين نحصل على :

$$[0u + 0u] + (-0u) = 0u + (-0u)$$

$$(\text{الفرض ٣}) \quad 0u + [0u + (-0u)] = 0u + (-0u) \quad \text{أى}$$

$$(\text{الفرض ٥}) \quad 0u + 0 = 0 \quad \text{أى}$$

$$(\text{الفرض ٤}) \quad 0u = 0 \quad \text{أى}$$

(ج) لاثبات أن $u = -u$ (١ -) يجب أن نبين أن $u + (-1)u = 0$. لإثبات ذلك نلاحظ أن :

$$(\text{الفرض ١٠}) \quad u + (-1)u = 1u + (-1)u$$

$$(\text{الفرض ٨}) \quad = (1 + (-1))u$$

$$(\text{خاصية من خواص الأعداد}) \quad = 0u$$

$$(\text{الجزء أ السابق}) \quad = 0$$

تمارين ٤ - ٢

في التمارين ١ - ١٤ تعطى فئة من الأشياء مع عمليتين للجمع والضرب في أعداد قياسية . حدد أى الفئات تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطيتين . بالنسبة إلى الفئات التى لا تكون فضاءاً خطياً اذكر جميع الفروض التى لا تتحقق .

١ - فئة جميع الثلاثيات (x, y, z) من الأعداد الحقيقية بالنسبة إلى العمليتين .

$$k(x, y, z) = (kx, y, z) \quad \text{و} \quad (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

٢ - فئة جميع الثلاثيات (x, y, z) من الأعداد الحقيقية بالنسبة إلى العمليتين

$$k(x, y, z) = (0, 0, 0) \quad \text{و} \quad (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

٣ - فئة جميع الأزواج (x, y) من الأعداد الحقيقية بالنسبة إلى العمليتين

$$k(x, y) = (2kx, 2ky) \quad \text{و} \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

٤ - فئة جميع الأعداد الحقيقية x ، مع عمليتي الجمع والضرب العاديين .

٥ - فئة جميع أزواج الأعداد الحقيقية التى على الصورة $(x, 0)$ مع العمليتين القياسيتين على R^2 .

٦ - فئة جميع أزواج الأعداد الحقيقية التى على الصورة (x, y) حيث $x \geq 0$ ، مع العمليتين القياسيتين على R^2 .

٧ - فئة جميع الأقواس النونية من الأعداد الحقيقية التى على الصورة (x, x, \dots, x) مع العمليتين القياسيتين على R^n .

٨ - فئة جميع أزواج الأعداد الحقيقية (x, y) مع العمليتين .

$$k(x, y) = (kx, ky) \quad \text{و} \quad (x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$$

٩ - فئة جميع الأعداد الحقيقية x مع العمليتين $xx' = x + x'$ و $kx = x^k$.

١٠ - فئة جميع المصفوفات من النوع 2×2 التي على الصورة :

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

مع عمليتي جمع المصفوفات وضرب المصفوفات في أعداد قياسية .

١١ - فئة جميع المصفوفات من النوع 2×2 التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

مع عمليتي جمع المصفوفات والضرب في أعداد قياسية .

١٢ - فئة جميع الدوال f ذات القيمة الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي بأكمله وبحيث يكون $f(1) = 0$ مع العمليتين المرفقتين في مثال (٨) .

١٣ - فئة جميع المصفوفات من النوع 2×2 التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$$

مع عمليتي جمع المصفوفات والضرب في أعداد قياسية .

١٤ - الفئة التي عنصرها الوحيد هو القمر . والعمليتان هما القمر + القمر = القمر ، k القمر = القمر حيث k عدد حقيقي .

١٥ - أثبت أن المستقيم المار بنقطة الأصل في R^3 يكون فضاء خطيً بالنسبة إلى العمليتين القياسيتين على R^3 .

١٦ - أكمل التفاصيل الناقصة في مثال ٥ .

١٧ - أكمل التفاصيل الناقصة في مثال ٨ .

١٨ - أثبت الجزء (ج) من نظرية ٣ .

١٩ - أثبت الجزء (د) من نظرية ٣ .

٢٠ - أثبت أنه لا يمكن أن يكون للفضاء الخطي أكثر من متجه صفري واحد .

٢١ - أثبت أن المتجه له بالضبط متجه سالب واحد .

٤ - ٣ الفضاءات الجزئية

إذا كان V فضاء خطيً ، فإن بعض الفئات الجزئية للفضاء V تكون بدورها فضاءات خطية بالنسبة إلى جميع المتجهات والضرب في أعداد قياسية المرفقان على V . سوف ندرس في هذا القسم مثل هذه الفئات الجزئية بالتفصيل .

تعريف : أى فئة جزئية W للفضاء الخطى V تسمى بفضاء جزئى للفضاء V إذا كان W بدوره فضاءاً خطياً بالنسبة إلى الجمع والضرب في أعداد قياسية المعرفان على V .

فثلاً المستقيمت والمستويات التى تمر بنقطة الأصل هى فضاءات جزئية للفضاء R^3 (مثلاً ٥ ، ٦) .

بصورة عامة . يجب أن يثبت الشخص الفروض العشرة للفضاء الخطى لى يبين أن الفئة W مع الجمع والضرب في أعداد قياسية تكون فضاءاً خطياً ولكن على الرغم من ذلك ، إذا كان W جزءاً من فئة أكبر V التى تكون بالفعل فضاءاً خطياً ، فإن بعض الفروض لا تحتاج إلى تحقيق للفضاء W لأنها تورث من V . فثلاً لاتوجد حاجة للتأكد من أن $u + v = v + u$ (الفرض ٢) للفضاء W لأنها تتحقق لجميع المتجهات في V ومن ثم لجميع المتجهات في W . وتكون بقية الفروض الموروثة من V إلى W هى ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ . لذلك لى نبين أن الفئة W هى فضاء جزئى للفضاء الخطى V نحتاج فقط لتحقيق الفروض ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ . وتبين النظرية التالية أنه حتى الفرضين ٤ ، ٥ يمكن الاستغناء عنهما .

نظرية ٤ : إذا كانت W فئة مكونة من متجه أو أكثر من الفضاء الخطى V فإن W تكون فضاءاً خطياً إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

(أ) إذا كان u ، v متجهين في W فإن $u + v$ أيضاً في W .

(ب) إذا كان k أى عدد قيسى وكان u أى متجه في W فإن ku أيضاً في W .

(يوصف عادة الشرطان (أ) ، (ب) بالقول بأن W مغلق بالنسبة إلى الجمع ومغلق بالنسبة إلى الضرب في أعداد قياسية) .

الاثبات : إذا كان W فضاءاً جزئياً من V فإن جميع فروض الفضاء الخطى تكون متحققة وبصفة خاصة يتحقق الفرضان ١ ، ٦ . ولكن هذان الفرضان هما بالتحديد الشرطان (أ) ، (ب) .

بالمعكس نفرض تحقق الشرطين (أ) ، (ب) . حيث أن هذين الشرطين هما فرضاً الفضاء الخطى ١ و ٦ ، لذلك نحتاج فقط لإثبات أن W يحقق بقية الفروض الثمانية . الفروض ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ تتحقق تلقائياً للمتجهات الموجودة في W حيث أنها تتحقق لجميع المتجهات الموجودة في V . لذلك لإكمال الإثبات نحتاج فقط للتأكد من أن الفرضين ٤ ، ٥ يتحققان في W .

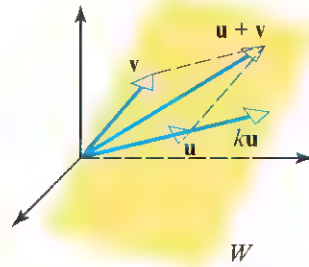
اعتبر u أى متجه في W . من الشرط (ب) يكون ku في W لأي عدد قيسى k . بوضع $k = 0$ ينتج أن $0u = 0$ موجود في W ، وبوضع $k = -1$ ينتج أن $u = -u$ موجود في W .

لكل فضاء خطى V على الأقل فضاءان جزئيان . يكون V نفسه فضاءاً جزئياً والفئة $\{0\}$ المكونة فقط من المتجه الصفري للفضاء V تكون فضاءاً جزئياً يسمى بالفضاء الجزئى الصفري . وعمداً الأمثلة التالية بصور أقل تفاهة للفضاءات الجزئية .

مثال (١١) :

في المثال ٥ من قسم (٤ - ٢) قد أوضحنا أن جميع المتجهات في أى مستوى مار بنقطة أصل R^3 تكون فضاءاً خطياً ، أى أن المستويات المارة بنقطة الأصل تكون فضاءاً جزئياً من R^3 . ويمكننا أيضاً إثبات هذه النتيجة هندسياً من نظرية ٤ .

اعتبر W أى مستوى مار بنقطة الأصل واعتبر أن u, v أى متجهين في W . يجب أن يقع $u+v$ في W لأنه يكون قطر متوازي الأضلاع المحدد من u و v شكل (٤ - ٤) وأيضاً ku يجب أن يقع في W لأي عدد قياسي k لأن ku يقع على المستقيم المار بالمتجه u . لذلك يكون W فضاءاً جزئياً من R^3 .



(شكل ٤ - ٤)

ملحوظة : يمكن استخدام مناقشة هندسية ماثلة لتلك المستخدمة في هذا المثال لإثبات أن المستقيمت المارة بنقطة الأصل تكون فضاءات جزئية من R^3 . يمكن إثبات (تمرين ٢٠ قسم ٤ - ٥) أن الفضاءات الجزئية من R^3 هي فقط : $\{0\}$ ، R^3 ، المستقيمت المارة بنقطة الأصل ، المستويات المارة بنقطة الأصل . وأيضاً الفضاءات الجزئية من R^2 هي فقط : $\{0\}$ ، R^2 ، المستقيمت المارة بنقطة الأصل .

مثال (١٢) :

أثبت أن الفئة W المكونة من جميع المصفوفات من النوع 2×2 والتي تحتوى أصفاراً على القطر الرئيسي تكون فضاءاً جزئياً للفضاء الخطي M_{22} المكون من جميع المصفوفات من النوع 2×2 .

الحل : اعتبر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

أى مصفوفتين من W و k أى عدد قياسي . فيكون

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad kA = \begin{bmatrix} 0 & ka_{12} \\ ka_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن kA ، $A + B$ ، $A + B$ تحتويان أصفاراً على القطر الرئيسي ، فإنهما يقعان في W . لذلك يكون W فضاءاً جزئياً من M_{22} .

مثال (١٣) :

اعتبر n أى عدد صحيح موجب واعتبر W الفئة المكونة من الدالة الصفرية وجميع كثيرات الحدود الحقيقية التي درجتها $n \geq$ ، أى جميع الدوال التي يمكن التعبير عنها بالصورة

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (4.2)$$

حيث a_0, a_1, \dots, a_n أعداد حقيقية . الفئة W تكون فضاءاً جزئياً للفضاء الخطي المكون من جميع الدوال الحقيقية الذي نوقش في مثال (٨) . لإثبات هذا اعتبر p, q هما الدالتان

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

فيكون

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

$$(kp)(x) = kp(x) = (ka_0) + (ka_1)x + \cdots + (ka_n)x^n$$

عل الصورة المعطاة في (4.2) . لذلك فإن $p + q$ وأيضاً kp من W . سوف نرسم للفضاء الخطي W في هذا المثال بالرمز P_n .

مثال (١٤) :

(للقراء الذين قد درسوا حساب التفاضل)

نتذكر من التفاضل أنه إذا كانت f, g دالتين متصلتين وكان k ثابتاً فإن $f + g, kf$ أيضاً يكونان دالتين متصلتين . لذلك ينتج أن فئة جميع الدوال المتصلة تكون فضاءاً جزئياً للفضاء الخطي المكون من جميع الدوال الحقيقية . يرمز لها الفضاء بالرمز $C(-\infty, +\infty)$. ويعتبر مثلاً قريباً جداً من هذا المثال الفضاء الخطي المكون من جميع الدوال المتصلة على فترة مغلقة $a \leq x \leq b$ ويرمز لهذا الفضاء بالرمز $C[a, b]$.

مثال (١٥) :

اعتبر النظام المكون من m من المعادلات الخطية في n من المجهولين

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

أو على صورة المصفوفات $Ax = b$ يسمى أى متجه (*)

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

من R^n مجتبه الحل للنظام إذا كان $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ حلاً للنظام . في هذا المثال سوف نبين أن فئة متجهات الحل لنظام متجانس تكون فضاءاً جزئياً من R^n .

اعتبر $Ax=0$ نظاماً متجانساً من m من المعادلات الخطية في n من المجهول . اعتبر W هي فئة متجهات الحل واعتبر s, s' متجهين من W . لإثبات أن W مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب في أعداد قياسية يجب أن نبين أن $s + s', ks$ أيضاً متجهات حل ، حيث k أى عدد قياسي . حيث أن s, s' متجهات حل فيكون

$$As = 0 \quad \text{and} \quad As' = 0$$

$$A(s + s') = As + As' = 0 + 0 = 0$$

لذلك يكون

$$A(ks) = k(As) = k0 = 0$$

و

تبين هاتان المعادلتان أن $s + s', ks$ يحققان المعادلة $Ax = 0$. لذلك يكون كل من $s + s', ks$ متجه حل .

يسمى الفضاء الجزئي W في هذا المثال بفضاء الحل للنظام $Ax = 0$.

في كثير من المسائل يعطى الفضاء الخطي V . ويكون من المهم إيجاد أصغر فضاء جزئي من V بحيث يحتوى فئة معينة من المتجهات $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$. يمد لنا التعريف التالى الطريقة لبناء مثل هذه الفضاءات الجزئية .

تعريف : يسمى المتجه w بتوكيبة خطية من المتجهات v_1, v_2, \dots, v_r إذا أمكن التعبير عنه بالصورة

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r$$

حيث k_1, k_2, \dots, k_r أعداد قياسية .

(*) تستخدم في هذا المثال صورة المصفوفات للمتجهات في R^n .

مثال (١٦) :

اعتبر المتجهين $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ ، $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$ من R^3 . بين أن $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ يكون تركيبة خطية من \mathbf{u} ، \mathbf{v} وأن $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ لا يكون تركيبة خطية من \mathbf{u} ، \mathbf{v} .

الحل : لكي يكون \mathbf{w} تركيبة خطية من \mathbf{u} ، \mathbf{v} ، يجب أن توجد أعداد قياسية k_1 ، k_2 بحيث يكون $\mathbf{w} = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v}$ أى أن

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

أو

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نحصل على

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 2 \\ -k_1 + 2k_2 &= 7 \end{aligned}$$

حل هذا النظام يعطى $k_1 = -3$ ، $k_2 = 2$ لذلك

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

بالمثل بالنسبة إلى \mathbf{w}' ، لكي يكون تركيبة خطية من \mathbf{u} ، \mathbf{v} يجب أن توجد أعداد قياسية k_1 ، k_2 بحيث يكون $\mathbf{w}' = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v}$ أى أن

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

أو

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

بمساواة المركبات المتناظرة تعطى

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 4 \\ 2k_1 + 4k_2 &= -1 \\ -k_1 + 2k_2 &= 8 \end{aligned}$$

وهذا النظام من المعادلات غير متوافق (تحقق من ذلك) . وإذن لا توجد مثل هذه الأعداد القياسية . ومن ثم \mathbf{w}' ليس بتركيبة خطية من \mathbf{u} ، \mathbf{v} .

تعريف : إذا كانت \mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، ... ، \mathbf{v}_n متجهات في الفضاء الخطى V ، وكان كل متجه في V يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من \mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، ... ، \mathbf{v}_n فإننا نقول أن هذه المتجهات تنشئ V .

مثال (١٧) :

تنشئ المتجهات $i = (1, 0, 0)$ ، $j = (0, 1, 0)$ ، $k = (0, 0, 1)$ الفضاء R^3 لأن أى متجه (a, b, c) فى R^3 يمكن كتابته على الصورة

$$(a, b, c) = ai + bj + ck$$

وهى تركيبة خطية من i, j, k .

مثال (١٨) :

تنشئ كثيرات الحدود $1, x, x^2, \dots, x^n$ الفضاء الخطى P_n (أنظر مثال ١٣). حيث أن أى كثيرة حدود p من P_n يمكن كتابتها على الصورة

$$p = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

وهى تركيبة خطية من $1, x, x^2, \dots, x^n$.

مثال (١٩) :

حدد ما إذا كانت المتجهات

$$v_3 = (2, 1, 3) \quad \text{و} \quad v_2 = (1, 0, 1) \quad v_1 = (1, 1, 2),$$

تنشئ R^3 .

الحل : يجب أن نحدد ما إذا كان أى متجه اختيارى $b = (b_1, b_2, b_3)$ فى R^3 يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية

$$b = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$$

من المتجهات v_3, v_2, v_1 . التعبير عن هذه المعادلة بدلالة المركبات يعطى

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3) \quad \text{أو}$$

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3) \quad \text{أو}$$

$$k_1 + k_2 + 2k_3 = b_1$$

$$k_1 + k_3 = b_2$$

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = b_3$$

نختزل المسألة إلى تحديد ما إذا كان هذا النظام متوافقا أم لا لجميع قيم b_1, b_2, b_3 . من الجزمين (أ) ، (د) لنظرية ١٣ فى القسم ١ - ٧ يكون هذا النظام متوافقا لجميع قيم b_1, b_2, b_3 . إذا فقط

إذا كانت مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ غير قابلة للانعكاس . ولكن $|A| = 0$ (تحقق من ذلك)

وعليه تكون A غير قابلة للانعكاس ومن ثم v_1, v_2, v_3 لا تنشئ R^3 .

بصورة عامة ، أى فئة مغطاة من المتجهات $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ فى فضاء خطى V قد تنشئ وقد لا تنشئ V . إذا كانت الفئة منشئة فإن كل متجه فى V يمكن التعبير عنه كتركيبية خطية من v_1, v_2, \dots, v_r وإذا كانت غير منشئة فإن بعض المتجهات يمكن التعبير عنها بالمثل والبعض الآخر لا يمكن التعبير عنه . تبين لنا النظرية التالية أنه إذا جمعنا مع كل المتجهات فى V التى يمكن التعبير عنها كتركيبية خطية من v_1, v_2, \dots, v_r فإننا نحصل على فضاء جزئى للفضاء V وهو يسمى بالفضاء الخطى المنشأ من $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ أو للتبسيط بالفضاء المنشأ من $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$.

نظرية ٥ : إذا كانت v_1, v_2, \dots, v_r متجهات فى الفضاء الخطى V فإن :

(أ) الفئة W المكونة من جميع التركيبات الخطية للمتجهات v_1, v_2, \dots, v_r تكون فضاءاً جزئياً للفضاء V .

(ب) W هى الفضاء الجزئى الأصغر للفضاء V الذى يحتوى v_1, v_2, \dots, v_r . بمعنى أن أى فضاء جزئى آخر للفضاء V يحتوى v_1, v_2, \dots, v_r يجب أن يحتوى W .

الإثبات :

(أ) لإثبات أن W فضاء جزئى من V يجب أن نثبت أنه مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب فى أعداد قياسية . إذا كان u, v متجهين فى W فإن

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_rv_r$$

وأيضاً

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_r, k_1, k_2, \dots, k_r$ أعداد قياسية . لذلك

$$u + v = (c_1 + k_1)v_1 + (c_2 + k_2)v_2 + \dots + (c_r + k_r)v_r$$

ويكون لأى عدد قيسى k .

$$ku = (kc_1)v_1 + (kc_2)v_2 + \dots + (kc_r)v_r$$

وإذن $u + v$ وأيضاً ku يكونان تركيبتين خطيتين من v_1, v_2, \dots, v_r ومن ثم يتمان فى W وعليه فإن W مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب فى أعداد قياسية .

(ب) أى متجه v_i هو تركيبة خطية من v_1, v_2, \dots, v_r حيث أنه يمكننا كتابة

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_r$$

فالفضاء الجزئى W يحتوى كلا من المتجهات v_1, v_2, \dots, v_r . افترض أن W' أى فضاء جزئى آخر بحيث يحتوى v_1, v_2, \dots, v_r . حيث أن W' مقلق بالنسبة إلى الجمع والضرب في أعداد قياسية ، لذلك يجب أن يحتوى جميع التركيبات الخطية $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_rv_r$

للمتجهات v_1, v_2, \dots, v_r

لذلك يحتوى W' كل متجه من W

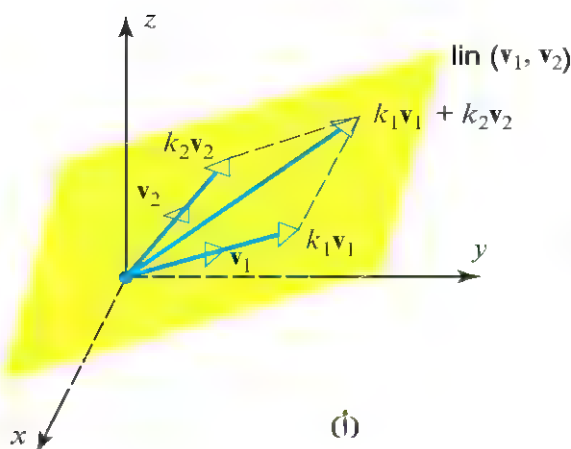
الفضاء الخطى W المنشأ من مجموعة المتجهات $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ سوف يرمز له بواسطة

$$\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \quad \text{أو} \quad \text{lin}(S)$$

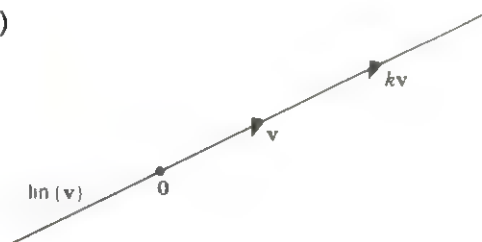
مثال (٢٠) :

إذا كان v_1, v_2 متجهين ليسا على استقامة واحدة في R^3 وكانت نقطتا البداية لهما عند نقطة الأصل فإن $\text{lin}\{v_1, v_2\}$ ، الذى يتكون من جميع التركيبات الخطية $k_1v_1 + k_2v_2$ ، هو المستوى المحدد بواسطة v_1, v_2 (شكل ٤ - أ) .

بالمثل ، إذا كان v متجها غير صفري في R^2 أو R^3 فإن $\text{lin}\{v\}$ الذى يكون فئة جميع المضاعفات القياسية kv ، هو المستقيم المحدد بواسطة v (شكل ٤ - ب) .



(١)



(ب)

(شكل ٤ - ب)

تمارين ٤ - ٣

١ - استخدم نظرية ٤ لتحديد أى مما يلي يكون فضاء جزئياً من R^3 .

(أ) جميع المتجهات التى على الصورة $(a, 0, 0)$.

(ب) جميع المتجهات التى على الصورة $(a, 1, 1)$.

(ج) جميع المتجهات التى على الصورة (a, b, c) حيث $b = a + c$.

(د) جميع المتجهات التى على الصورة (a, b, c) حيث $b = a + c + 1$.

٢ - استخدم نظرية ٤ لتحديد أى مما يلي يكون فضاء جزئياً من M_{22} .

(أ) جميع المصفوفات التى على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

حيث a, b, c, d أعداد صحيحة .

(ب) جميع المصفوفات التى على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

حيث $a + d = 0$.

(ج) جميع المصفوفات A من النوع 2×2 بحيث يكون $A = A^t$.

(د) جميع المصفوفات A من النوع 2×2 بحيث يكون $\det(A) = 0$.

٣ - استخدم نظرية ٤ لتحديد أى مما يلي يكون فضاء جزئياً من P_3 .

(أ) جميع كثيرات الحدود $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ التى فيها $a_0 = 0$.

(ب) جميع كثيرات الحدود $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ التى فيها $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

(ج) جميع كثيرات الحدود $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ التى فيها a_0, a_1, a_2, a_3 أعداد صحيحة .

(د) جميع كثيرات الحدود التى على الصورة $a_0 + a_1 x$ حيث a_0, a_1 أعداد حقيقية .

٤ - استخدم نظرية ٤ لتحديد أى مما يلي يكون فضاء جزئياً لفضاء جميع الدوال ذات القيم الحقيقية f المعرفة على المستقيم الحقيقى بأكمله .

(أ) جميع f بحيث يكون $f(x) \leq 0$ لجميع x .

(ب) جميع f بحيث يكون $f(0) = 0$.

(ج) جميع f بحيث يكون $f(0) = 2$.

(د) جميع الدوال الثابتة .

(هـ) جميع f التي على الصورة $k_1 + k_2 \sin x$ بحيث يكون k_1 ، k_2 عددين حقيقيين .

٥ - أى مما يلي يكون تركيبة خطية من $u = (1, -1, 3)$ ، $v = (2, 4, 0)$

(أ) $(3, 3, 3)$ (ب) $(4, 2, 6)$ (ج) $(1, 5, 6)$ (د) $(0, 0, 0)$

٦ - عبر عما يلي كتركيبة خطية من $u = (2, 1, 4)$ ، $v = (1, -1, 3)$ ، $w = (3, 2, 5)$

(أ) $(5, 9, 5)$ (ب) $(2, 0, 6)$ (ج) $(0, 0, 0)$ (د) $(2, 2, 3)$

٧ - عبر عما يلي كتركيبة خطية من

$$p_1 = 2 + x + 4x^2, p_2 = 1 - x + 3x^2, p_3 = 3 + 2x + 5x^2$$

(أ) $5 + 9x + 5x^2$ (ب) $2 + 6x^2$ (ج) 0 (د) $2 + 2x + 3x^2$ (هـ)

٨ - أى مما يلي يكون تركيبة خطية من

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(أ) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$

٩ - فى كل جزء حدد ما إذا كانت المتجهات المطة تنشئ R^3 .

(أ) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 0, 0)$

(ب) $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (4, 1, 2), v_3 = (8, -1, 8)$

(ج) $v_1 = (3, 1, 4), v_2 = (2, -3, 5), v_3 = (5, -2, 9), v_4 = (1, 4, -1)$

(د) $v_1 = (1, 3, 3), v_2 = (1, 3, 4), v_3 = (1, 4, 3), v_4 = (6, 2, 1)$

١٠ - حدد أى مما يلي يقع فى الفراغ المنشأ من

$$g = \sin^2 x \quad \text{و} \quad f = \cos^2 x$$

(أ) $\cos 2x$ (ب) $3 + x^2$ (ج) 1 (د) $\sin x$

١١ - حدد ما إذا كانت كثيرات الحدود التالية تنشئ P_3 .

$$p_1 = 1 + 2x - x^2 \quad p_2 = 3 + x^2$$

$$p_3 = 5 + 4x - x^2 \quad p_4 = -2 + 2x - 2x^2$$

١٢ - افترض $v_1 = (2, 1, 0, 3)$, $v_2 = (3, -1, 5, 2)$, $v_3 = (-1, 0, 2, 1)$

أى من المتجهات التالية تقع في $\text{lin} \{v_1, v_2, v_3\}$ ؟

(أ) $(2, 3, -7, 3)$ (ب) $(0, 0, 0, 0)$ (ج) $(1, 1, 1, 1)$ (د) $(-4, 6, -13, 4)$

١٣ - أوجد معادلة المستوى المنشأ بالمتجهين $u = (1, 1, -1)$ ، $v = (2, 3, 5)$.

١٤ - أوجد المعادلات البارامترية للخط المنشأ بالمتجه $u = (2, 7, -1)$.

١٥ - أثبت أن متجهات الحل لنظام غير متجانس متوافق مكون من m معادلة خطية في n مجهول لا تكون فضاءاً جزئياً من R^n .

١٦ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل) . أثبت أن الفئات التالية من الدوال هي فضاءات جزئية للفضاء الخطي في مثال ٨ .

(أ) جميع الدوال المتصلة عند كل نقطة .

(ب) جميع الدوال القابلة للتفاضل عند كل نقطة .

(ج) جميع الدوال القابلة للتفاضل عند كل نقطة وتحقق أن $f' + 2f = 0$.

٤ - ٤ الاستقلال الخطي

من قسم ٤ - ٣ ، يكون الفضاء الخطي منشأ بواسطة فئة المتجهات $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ إذا كان كل متجه من V هو تركيبة خطية من v_1, v_2, \dots, v_r . الفئات المنشئة مفيدة في بعض النوعيات من المسائل حيث أنه أحياناً يمكن دراسة فضاء خطي V بدراسة المتجهات في فئة منشئة S أولاً ، ثم تعميم النتائج إلى بقية V . لذلك فن المرغوب فيه الإبقاء على الفئات المنشئة S صغيرة قدر استطاعتنا . وتعتمد مسألة إيجاد الفئة المنشئة الأصغر لفضاء خطي على فكرة الاستقلال الخطي وهي التي سندرسها في هذا القسم .

إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ فئة من المتجهات ، فإن معادلة المتجهات

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$$

لها على الأقل حل واحد هو

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

إذا كان هذا هو الحل الوحيد ، فإن S تسمى فئة مستقلة خطياً . إذا كانت هناك حلول أخرى فإن S تسمى فئة غير مستقلة خطياً .

مثال (٢١) :

فئة المتجهات $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ حيث

$$v_1 = (2, -1, 0, 3), v_2 = (1, 2, 5, -1) \quad v_3 = (7, -1, 5, 8)$$

غير مستقلة خطياً حيث $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$ أن

مثال (٢٢) :

كثيرات الحدود $p_1 = 1 - x, p_2 = 5 + 3x - 2x^2, p_3 = 1 + 3x - x^2$

تكون فئة غير مستقلة خطياً في P_2 حيث أن $3p_1 - p_2 + 2p_3 = 0$.

مثال (٢٣) :

اعتبر المتجهات $k = (0, 0, 1)$ و $j = (0, 1, 0)$, $i = (1, 0, 0)$

من R^3 . بدلالة المركبات فإن معادلة المتجهات

$$k_1 i + k_2 j + k_3 k = 0$$

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad \text{نصبح}$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0) \quad \text{أو بصورة مكافئة}$$

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0 \quad \text{أى}$$

وإذن الفئة $S = \{i, j, k\}$ مستقلة خطياً . ويمكن استخدام برهان مماثل لإثبات أن المتجهات

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

تكون فئة مستقلة خطياً في R^n .

مثال (٢٤) :

حدد ما إذا كانت المتجهات

$$v_1 = (1, -2, 3) \quad v_2 = (5, 6, -1) \quad v_3 = (3, 2, 1)$$

تكون فئة مستقلة خطياً أم فئة غير مستقلة خطياً .

الحل : بدلالة المركبات فإن معادلة المتجهات

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

تصح

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

أو بصورة مكافئة

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

تعطى مساواة المركبات المتناظرة

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

لذلك فإن \mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، \mathbf{v}_3 تكون فئة غير مستقلة خطياً إذا كان لهذا النظام حل غير تافه ، أو تكون فئة مستقلة خطياً إذا كان له فقط الحل التافه . يحل هذا النظام نحصل على

$$k_1 = -\frac{1}{2}t \quad k_2 = -\frac{1}{2}t \quad k_3 = t$$

فالنظام له حلول غير تافهة وتكون \mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، \mathbf{v}_3 فئة غير مستقلة خطياً ، وبديل لذلك كان بإمكاننا إثبات وجود حلول غير تافهة بدون حل النظام ولكن باثبات أن مصفوفة المعاملات محددتها يساوى الصفر ومن ثم غير قابلة للانعكاس (تحقق من هذا) .

اللفظ « غير مستقلة خطياً » يعطينا فكرة أن المتجهات تعتمد على بعضها البعض بطريقة ما . لكي نرى أن هذا هو الحال بالفعل ، نفرض أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ فئة غير مستقلة خطياً . لهذا فإن معادلة المتجهات

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

لها حل آخر غير $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ وبالتحديد نفرض أن $k_1 \neq 0$ ضرب كل من الطرفين في $1/k_1$ والحل بالنسبة إلى \mathbf{v}_1 يعطين

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 + \dots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)\mathbf{v}_r$$

لذلك يمكن التعبير عن \mathbf{v}_1 كتركيبة خطية من المتجهات الباقية \mathbf{v}_2 ، \mathbf{v}_3 ، ... ، \mathbf{v}_r . نترك كتمرين إثبات أن أى فئة من متجهين أو أكثر تكون غير مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات تركيبة خطية من بقية المتجهات .

يعطى المثالان التاليان تفسيراً هندسياً للاعتماد الخطى في R^2 و R^3 .

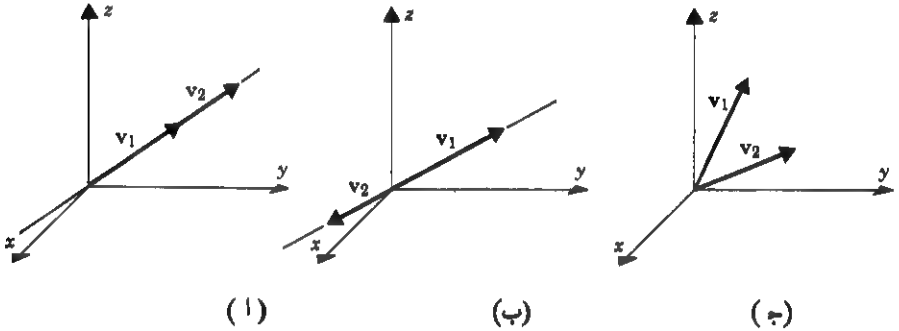
مثال (٢٥) :

يكون المتجهان v_1, v_2 فئة غير مستقلين خطياً إذا وفقط إذا كان أحد المتجهين مضاعفاً قياسياً للآخر . لمعرفة السبب ، نفرض أن $S = \{v_1, v_2\}$ فئة غير مستقلة خطياً . حيث أن معادلة المتجهات $k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$ لها حل آخر غير $k_1 = k_2 = 0$ فيمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كما يلي :

$$v_2 = \left(-\frac{k_1}{k_2}\right) v_1 \quad \text{أو} \quad v_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right) v_2$$

ولكن هذا يخبرنا بأن v_1 مضاعف قياسي للمتجه v_2 أو أن v_2 مضاعف قياسي للمتجه v_1 . والعكس متروك كتمرين .

وينتج أن أى متجهين في R^2 أو R^3 يكونان غير مستقلين خطياً إذا وفقط إذا وقعا على نفس المستقيم المار بنقطة الأصل (شكل ٤ - ٦) .

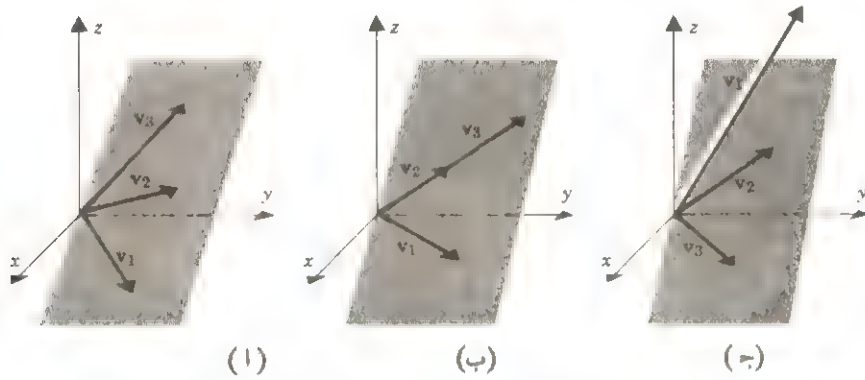


(شكل ٤ - ٦) (ج) مستقلان خطياً (ب) غير مستقلين خطياً (أ) غير مستقلين خطياً

مثال (٢٦) :

إذا كان v_1, v_2, v_3 ثلاثة متجهات في R^3 فإن الفئة $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ تكون غير مستقلة خطياً إذا وفقط إذا وقعت المتجهات الثلاثة في نفس المستوى المار بنقطة الأصل عندما توضع فقط بداية المتجهات عند نقطة الأصل (شكل ٤ - ٧) . لإثبات هذا ، تذكر أن v_1, v_2, v_3 تكون غير مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات على الأقل تركيبة خطية من الإثنين الباقيين أو بصورة مكافئة إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات على الأقل في الفضاء المنشأ من الإثنين الباقيين . ولكن الفضاء المنشأ من أى متجهين في R^3 هو إما مستقيم مار بنقطة الأصل ، أو مستوى مار بنقطة الأصل ، أو نقطة الأصل نفسها (تمرين ١٧) وفي أى حالة يقع الفضاء المنشأ بواسطة متجهين في R^3 دائماً في مستوى مار بنقطة الأصل .

نختتم هذا القسم بنظرية تثبت أن أية فئة مستقلة خطيا في R^n يمكن أن تحتوي على الأكثر n من المتجهات .



(شكل ٤ - ٧) (ج) مستقلة خطيا (ب) غير مستقلة خطيا (أ) غير مستقلة خطيا .

نظرية ٩ : افترض أن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ فئة من المتجهات في R^n إذا كان $r > n$ فإن S تكون غير مستقلة خطيا .

الإثبات : افترض أن

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}) \\ v_2 &= (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n}) \\ &\vdots \\ v_r &= (v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{rn}) \end{aligned}$$

اعتبر المعادلة

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$$

إذا عبرنا ، كما أوضحنا في مثال ٢٤ ، عن كل من طرفي هذه المعادلة بدلالة المركبات ثم ساوينا المركبات المتناظرة فإننا نحصل على النظام

$$\begin{aligned} v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \dots + v_{r1}k_r &= 0 \\ v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \dots + v_{r2}k_r &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \dots + v_{rn}k_r &= 0 \end{aligned}$$

وهذا نظام متجانس من n من المعادلات في r من المجاهيل k_1, k_2, \dots, k_r حيث أن $r > n$ فينتج من نظرية ١ بقسم ٣ - ١ أن للنظام حولا غير تافهة لذلك تكون $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ فئة غير مستقلة خطيا .

١ - بوجه خاص نتبيننا هذه النظرية أن أى فئة من R^2 بها أكثر من متجهين تكون غير مستقلة خطياً .
وأي فئة في R^3 بها أكثر من ثلاثة متجهات تكون غير مستقلة خطياً .

تمارين ٤ - ٤

١ - اشرح لماذا يكون ما يلي فئات غير مستقلة خطياً من المتجهات (حل هذا التمرين بمجرد النظر) .

(أ) $u_1 = (1, 2)$ ، $u_2 = (-3, -6)$ في R^2 .

(ب) $u_1 = (2, 3)$ ، $u_2 = (-5, 8)$ ، $u_3 = (6, 1)$ في R^2 .

(ج) $p_1 = 2 + 3x - x^2$ ، $p_2 = 6 + 9x - 3x^2$ في P_2 .

(د) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ في M_{22}

٢ - أى من المتجهات في R^3 التالية تكون غير مستقلة خطياً ؟

(أ) $(2, -1, 4)$ ، $(3, 6, 2)$ ، $(2, 10, -4)$

(ب) $(3, 1, 1)$ ، $(2, -1, 5)$ ، $(4, 0, -3)$

(ج) $(6, 0, -1)$ ، $(1, 1, 4)$

(د) $(1, 3, 3)$ ، $(0, 1, 4)$ ، $(5, 6, 3)$ ، $(7, 2, -1)$

٣ - أى من الفئات التالية من المتجهات في R^4 تكون غير مستقلة خطياً ؟

(أ) $(1, 2, 1, -2)$ ، $(0, -2, -2, 0)$ ، $(0, 2, 3, 1)$ ، $(3, 0, -3, 6)$

(ب) $(4, -4, 8, 0)$ ، $(2, 2, 4, 0)$ ، $(6, 0, 0, 2)$ ، $(6, 3, -3, 0)$

(ج) $(4, 4, 0, 0)$ ، $(0, 0, 6, 6)$ ، $(-5, 0, 5, 5)$

(د) $(3, 0, 4, 1)$ ، $(6, 2, -1, 2)$ ، $(-1, 3, 5, 1)$ ، $(-3, 7, 8, 3)$

٤ - أى من الفئات التالية من المتجهات في P_2 تكون غير مستقلة خطياً ؟

(أ) $2 - x + 4x^2$ ، $3 + 6x + 2x^2$ ، $2 + 10x - 4x^2$

(ب) $3 + x + x^2$ ، $2 - x + 5x^2$ ، $4 - 3x^2$

(ج) $6 - x^2$ ، $1 + x + 4x^2$

(د) $1 + 3x + 3x^2$ ، $x + 4x^2$ ، $5 + 6x + 3x^2$ ، $7 + 2x - x^2$

٥ - افترض أن V هو الفضاء الخطي لجميع الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي بأكمله .

أى من الفئات التالية من المتجهات في V تكون غير مستقلة خطياً ؟

(ب) $x, \cos x$

(د) $\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x$

(و) $0, x, x^2$

(أ) $2, 4 \sin^2 x, \cos^2 x$

(ج) $1, \sin x, \sin 2x$

(هـ) $(1 + x)^2, x^e + 2x, 3$

٦ - افترض أن v_1, v_2, v_3 متجهات في R^3 بحيث تكون نقط البداية لها عند نقطة الأصل . في كل جزء حدد ما إذا كانت المتجهات الثلاثة واقعة في مستوى .

$$(أ) \quad v_1 = (1, 0, -2), v_2 = (3, 1, 2), v_3 = (1, -1, 0)$$

$$(ب) \quad v_1 = (2, -1, 4), v_2 = (4, 2, 3), v_3 = (2, 7, -6)$$

٧ - افترض أن v_1, v_2, v_3 متجهات في R^3 بحيث تكون نقط البداية لها عند نقطة الأصل . في كل جزء حدد ما إذا كانت المتجهات الثلاثة واقعة على نفس المستقيم .

$$(أ) \quad v_1 = (3, -6, 9), v_2 = (2, -4, 6), v_3 = (1, 1, 1)$$

$$(ب) \quad v_1 = (2, -1, 4), v_2 = (4, 2, 3), v_3 = (2, 7, -6)$$

$$(ج) \quad v_1 = (4, 6, 8), v_2 = (2, 3, 4), v_3 = (-2, -3, -4)$$

٨ - لأي قيم λ الحقيقية تكون المتجهات التالية فئة غير مستقلة في R^3 ؟

$$v_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), v_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}), v_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$$

٩ - اعتبر $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فئة متجهات في فضاء خطي V . أثبت أنه إذا كان أحد المتجهات هو المتجه الصفري فإن S غير مستقلة خطياً .

١٠ - إذا كانت $\{v_1, v_2, v_3\}$ فئة مستقلة خطياً من المتجهات فأثبت أن

$$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \text{ and } \{v_3\}$$

أيضاً فئات مستقلة خطياً .

١١ - إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فئة مستقلة خطياً من المتجهات ، فأثبت أن كل فئة خطية جزئية من S بها متجه أو أكثر تكون مستقلة خطياً .

١٢ - إذا كانت $\{v_1, v_2, v_3\}$ فئة غير مستقلة خطياً من المتجهات في فضاء خطي V ، فأثبت أن $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ أيضاً فئة غير مستقلة خطياً حيث v_4 أى متجه آخر في V .

١٣ - إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ فئة غير مستقلة خطياً من المتجهات في فضاء خطي V فأثبت أن $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ أيضاً غير مستقلة خطياً حيث $v_{r+1}, \dots, v_n, v_r, \dots, v_1$ أى متجهات أخرى في V .

١٤ - أثبت أن أى فئة بها أكثر من ثلاثة متجهات من P_2 غير مستقلة خطياً .

١٥ - أثبت أنه إذا كانت $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطياً وكان v_3 لا يقع في $\text{lin}\{v_1, v_2\}$ فإن $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطياً .

١٦ - أثبت أن أى فئة من متجهين أو أكثر تكون غير مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات يمكن التعبير عنه كتركيب خطية من بقية المتجهات .

١٧ - أثبت : الفضاء المنشأ من متجهين في R^3 إما مستقيم مار بنقطة الأصل أو مستوى مار بنقطة الأصل أو نقطة الأصل نفسها .

١٨ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل) . افترض أن V هو الفضاء الخطي للدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي بأكمله . إذا كانت f, g, h متجهات في V بحيث تكون قابلة للتفاضل مرتين ، فإن الدالة $w = w(x)$ المعرفة بواسطة

$$w(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix}$$

تسمى رونسكيان f, g, h . أثبت أن f, g, h تكون فئة مستقلة خطيا إذا لم يكن الرونسكيان هو المتجه الصفري في V [أى أن $w(x)$ لا تساوى الصفر تطابقيا] .

١٩ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل) . استخدم الرونسكيان (تمرين ١٨) لإثبات أن فئة المتجهات التالية مستقلة خطيا :

$$(أ) 1, x, e^x \quad (ب) \sin x, \cos x, x \sin x \quad (ج) x^2 e^x, x e^x, e^x \quad (د) 1, x, x^2$$

٤ - ٥ الأساس والبعاد

نحن ن فكر دائما في أن المستقيم ذو بعد واحد ، والمستوى ذو بعدين والفضاء المحيط بنا ذو ثلاثة أبعاد . والهدف الأول لهذا القسم أن نجعل هذه الفكرة البديهية للبعد أكثر دقة .

تعريف : إذا كان V أى فضاء خطي و $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ فئة منتهية من المتجهات في V ، فإن S تسمى بأساس للفضاء V إذا كان

(١) S مستقلة خطياً

(٢) تنشئ V

مثال (٢٧) :

اعتبر $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ في مثال ٢٣ أثبتنا أن $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ فئة مستقلة خطيا في R^n . حيث أن أى متجه $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ في R^n يمكن كتابته على الصورة $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$ فإن S تنشئ R^n ولذلك تكون أساساً . وتسمى بالأساس المعتاد للفضاء R^n .

مثال (٢٨) :

اعتبر $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 9, 0), v_3 = (3, 3, 4)$. أثبت أن الفئة $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ تكون أساساً للفضاء R^3 .

الحل : لإثبات أن S تنشئ R^3 ، يجب أن نثبت أن أى متجه اختياري $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ يمكن التعبير عنه كتركيب خطية

$$\mathbf{b} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 \quad (4.3)$$

من المتجهات الموجودة في S . التعبير عن (4.3) بدلالة المركبات يعطى

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4)$$

أو

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3)$$

أو

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \\ k_1 + 4k_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

لذلك لإثبات أن S تنشئ V يجب أن نوضح أن النظام (4.4) له حل لجميع الاختيارات $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. لإثبات أن S مستقلة خطيا يجب أن نثبت أن الحل الوحيد للمعادلة

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

هو $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

كما سبق إذا عبرنا عن (4.5) بدلالة المركبات ، فإن تحقيق الاستقلال يختزل إلى إثبات أن النظام المتجانس

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 + 4k_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

له فقط الحل الصفري . لاحظ أن النظامين (4.4) ، (4.6) لها نفس مصفوفة المعاملات . لذلك من الأجزاء (أ) ، (ب) ، (د) من نظرية ١٣ فى قسم ١ - ٧ يمكننا فى نفس الوقت إثبات أن S مستقلة خطيا وتنشئ R^3 باثبات أن مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

فى النظامين (4.4) ، (4.6) قابلة للانعكاس . حيث أن

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

فنتج من نظرية ٦ فى قسم ٢ - ٣ أن A قابلة للانعكاس . لهذا فإن S تكون أساسا للفضاء R^3 .

مثال (٢٩) :

الفئة $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ تكون أساساً للفضاء الخطي P_n المعروف في مثال ١٣ . من مثال ١٨ ، المتجهات الموجودة في S تنشئ P_n . لإثبات أن S مستقلة خطياً ، نفرض أن تركيبة خطية ما من متجهات S هي المتجه الصفري ، أى أن

$$c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \equiv 0 \quad (4.7)$$

يجب أن نبين أن $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$. من علم الجبر كثيرة الحدود غير الصفري من درجة n لها على الأكثر n من الجذور المختلفة . حيث أن (4.7) متطابقة فإن كل قيمة من قيم x تكون جذراً للطرف الأيسر . وهذا يحتم أن $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ وإلا كانت $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ لها أكثر من n من الجذور . على ذلك تكون S مستقلة خطياً . الأساس S في هذا المثال يسمى بالأساس المعتاد للفضاء P_n .

مثال (٣٠) :

ليكن

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الفئة $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ تكون أساساً للفضاء الخطي $M_{2 \times 2}$ للمصفوفات من النوع 2×2 . لإثبات أن S تنشئ $M_{2 \times 2}$ ، لاحظ أن المتجه (المصفوفة) النموذجي :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

يمكن كتابته على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

لإثبات أن S مستقلة خطياً ، نفرض أن

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0$$

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{أى أن}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{فيكون}$$

ومنها $a = b = c = d = 0$ وعليه تكون S مستقلة خطياً .

مشال (۳۱) :

إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ مجموعة مستقلة خطياً في فضاء خطي S فإن V تكون أساساً للفضاء الجزئي $\text{lin}(S)$ حيث أن S مستقلة ومن تعريف $\text{lin}(S)$ ، فإن S تنشئ $\text{lin}(S)$.

أى فضاء خطي غير صفري V يسمى فضاء ذا بعد منتهى إذا كان يحتوى فئة منتهية من المتجهات $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ التى تكون أساساً. إذا لم توجد مثل هذه الفئة فإن V يسمى بفضاء ذاتى بعد لا نهائى. بالإضافة إلى ذلك سوف نعتبر الفضاء الخطي الصفري كفضاء منتهى الأبعاد على الرغم من أنه لا يوجد له أى فئة مستقلة خطياً ومن ثم ليس له أى أساس.

مثال (۳۶) :

من الأمثلة ٢٧ ، ٢٩ ، ٣٠ تكون R^n ، P_n ، M_{22} فضاءات خطية محدودة العدد .

تعتبرنا النظرية التالية المعنى لمفهوم البعد للفضاء الخطي . ومنها سوف نحصل على واحدة من أهم النتائج في الجبر الخطي .

نظرية v : إذا كانت $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً لفضاء خطي V ، فإن أي فئة بها أكثر من n من المتجهات تكون غير مستقلة خطياً .

الإثبات : افرض $S = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ أى فئة من m من المتجهات فى V حيث $m > n$ نرغب فى إثبات أن S' غير مستقلة خطيا . حيث أن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تكون أساسا فإن w_i يمكن أن نعب عنه كتركيبه خطيا من متجهات S وليكن

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_m &= a_{1m}\mathbf{v}_1 + a_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

لإثبات أن S' غير مستقلة خطياً يجب أن نوجد أعداداً قياسية k_1, k_2, \dots, k_m ليست جميعها صفراً بحيث يكون

$$k_1 \mathbf{w}_1 + k_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + k_m \mathbf{w}_m = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

باستخدام المعادلات الموجودة في (4.8) يمكننا إعادة كتابة (4.9) على الصورة

$$\begin{aligned} & (k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + \cdots + k_m a_{1m}) \mathbf{v}_1 \\ & + (k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + \cdots + k_m a_{2m}) \mathbf{v}_2 \\ & + (k_1 a_{n1} + k_2 a_{n2} + \cdots + k_m a_{nm}) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

مثال (٣٥) :

حدد أى أساس والبعد لفضاء الحل للنظام المتجانس

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

الحل : من مثال ٨ فى قسم ١ - ٣ قد أثبتنا أن الحلول تعطى بواسطة

$$x_1 = -s - t \quad x_2 = s \quad x_3 = -t \quad x_4 = 0 \quad x_5 = t$$

لهذا فإن متجهات الحل يمكن كتابتها كما يلى :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهو ما يثبت أن المتجهين

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يشكلان فضاء الحل . حيث أنهما أيضاً مستقلان خطياً (تحقق من هذا) ، فيكون $\{v_1, v_2\}$ أساساً ، ويكون فضاء الحل ثنائى البعد .

وبصفة عامة لإثبات أن فئة من المتجهات $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تكون أساساً لفضاء خطى V يجب أن نثبت أن المتجهات مستقلة خطياً وتنشئ V ، إلا أنه إذا حدث وعلمنا أن V من بعد n (وإذن تحتوى الفئة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ العدد الصحيح من المتجهات فى الأساس) ، فيكفى أن نتأكد إما من الاستقلال الخطى أو من الإنشاء وسوف يتحقق الشرط الباقى تلقائياً . وهذا هو محتوى الجزئين (أ) ، (ب) من النظرية التالية . الجزء (د) من هذه النظرية ينص على أن أى فئة مستقلة خطياً تكون جزءاً من أساس للفضاء V .

نظرية ٩ :

(أ) إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فئة مستقلة خطياً من n من المتجهات فى فضاء V من بعد n فإن S تكون أساساً للفضاء V .

(ب) إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فئة من n من المتجهات بحيث تنشئ فضاء V من بعد n فإن S تكون أساساً للفضاء V .

(ج) إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ فئة مستقلة خطياً في فضاء V من بعد n وكان $p < n$ ، فإن S يمكن توسيعها إلى أساس للفضاء V أى أنه توجد متجهات v_{p+1}, \dots, v_n بحيث تكون $\{v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ أساساً للفضاء V .

نترك الإثباتات كتمرين.

مثال (٣٦) :

أثبت أن $v_2 = (5, 5)$ ، $v_1 = (-3, 7)$ تكون أساساً للفضاء R^2 .

الحل : حيث أن أياً من المتجهين ليس مضاعفاً قياسياً للآخر ، فإن $S = \{v_1, v_2\}$ تكون مستقلة خطياً . حيث أن R^2 ثنائى البعد ، فإن S تكون أساساً للفضاء R^2 من الجزء (أ) من نظرية ٩ .

تمارين ٤ - ٥

١ - اشرح لماذا لا تكون الفئات التالية من المتجهات أساسات للفضاءات الخطية المشار إليها (حل هذا التمرين بمجرد النظر) .

- (أ) للفضاء R^2 $u_1 = (1, 2), u_2 = (0, 3), u_3 = (2, 7)$
 (ب) للفضاء R^3 $u_1 = (-1, 3, 2), u_2 = (6, 1, 1)$
 (ج) للفضاء P_2 $p_1 = 1 + x + x^2, p_2 = x - 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{للفضاء } M_{22}$$

٢ - أى من الفئات التالية من المتجهات تكون أساساً للفضاء R^2 ؟

- (أ) $(2, 1), (3, 0)$ (ب) $(4, 1), (-7, -8)$ (ج) $(0, 0), (1, 3)$ (د) $(-4, -12), (3, 9)$

٣ - أى من الفئات التالية من المتجهات تكون أساساً للفضاء R^3 ؟

- (أ) $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)$ (ب) $(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)$
 (ج) $(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)$ (د) $(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)$

٤ - أي من الفئات التالية من المتجهات تكون أساساً للفضاء P_2 ؟

(أ) $1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x$

(ب) $4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2$

(ج) $1 + x + x^2, x + x^2, x^2$

(د) $-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2$

٥ - أثبت أن الفئة التالية من المتجهات أساس للفضاء M_{22} .

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

٦ - اعتبر V هو الفضاء المنشأ بواسطة $v_1 = \cos^2 x, v_2 = \sin^2 x, v_3 = \cos 2x$.

(أ) أثبت أن $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ليست أساساً للفضاء V .

(ب) أوجد أساساً للفضاء V .

في التمارين ٧ - ١٢ أوجد البعد وأساساً للفضاء الحل للنظام.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 & \text{أ} \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 & \text{ب} \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 & \text{١٠} \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 & \text{٩} \\ 4x_1 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 & \text{١٢} \\ 3x + 2y - z &= 0 \\ 2x - 4y + z &= 0 \\ 4x + 8y - 3z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 & \text{١١} \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

١٣ - أوجد أساسات للفضاءات الجزئية التالية من R^3 .

(أ) المستوى $3x - 2y + 5z = 0$.

(ب) المستوى $x - y = 0$

$x = 2t$

(ج) المستقيم $y = -t, -\infty < t < +\infty$

$z = 4t$

(د) جميع المتجهات التي على الصورة (a, b, c) حيث $b = a + c$.

١٤ - أوجد أبعاد الفضاءات الجزئية التالية من R^4 .

(أ) جميع المتجهات التي على الصورة $(a, b, c, 0)$.

(ب) جميع المتجهات التي على الصورة (a, b, c, d) حيث $c = a - b$ ، $d = a + b$.

(ج) جميع المتجهات التي على الصورة (a, b, c, d) حيث $a = b = c = d$.

١٥ - أوجد بعد الفضاء الجزئي من P_3 الذي يتكون من جميع كثيرات الحدود $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ التي فيها $a_0 = 0$.

١٦ - اعتبر $\{v_1, v_2, v_3\}$ أساساً للفضاء الخطي V . أثبت أن $\{u_1, u_2, u_3\}$ أيضاً أساس حيث $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ ، $u_2 = v_1 + v_2$ ، $u_1 = v_1$.

١٧ - أثبت أن الفضاء الخطي المكون من جميع الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي يأكله لا نهائى البعد (إرشاد : افرض أنه ذو بعد منتهى n ثم احصل على تناقض بتقدير $n + 1$ متجها مستقلا خطيا .

١٨ - أثبت أن الفضاء الجزئي لفضاء ذي بعد منتهى يكون ذا بعد منتهى .

١٩ - افترض أن V فضاء جزئي لفضاء خطي W ذي بعد منتهى . أثبت أن بعد $(V) \geq$ بعد (W) (إرشاد : V ذو بعد منتهى من تمرين ١٨) .

٢٠ - أثبت أن الفضاءات الجزئية الوحيدة للفضاء R^3 هي المستقيبات المارة بنقطة الأصل ، المستويات المارة بنقطة الأصل ، الفضاء الجزئي الصفري ، R^3 نفسه (إرشاد : من تمرين ١٩ يجب أن تكون الفضاءات الجزئية للفضاء R^3 صفرية البعد ، أحادية البعد ، ثنائية البعد أو ثلاثية البعد) .

٢١ - أثبت الجزء (أ) من نظرية ٩ .

٢٢ - أثبت الجزء (ب) من نظرية ٩ .

٢٣ - أثبت الجزء (ج) من نظرية ٩ .

٤ - ٦ فضاء الصفوف وفضاء الاعمدة لمصفوفة - الرتبة - تطبيقات على ايجاد الاساسات

سوف ندرس في هذا القسم بعض الفضاءات الخطية المتعلقة بالمصفوفات وسوف تعطينا النتائج طريقة بسيطة لإيجاد الأساسات باختيار المصفوفة المعينة إلى الصورة الصفية المميزة .

تعريف : اعتبر المصفوفة من النوع $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى المتجهات

$$r_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$r_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$r_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

المكونة من صفوف A بمتجهات الصفوف للمصفوفة A وتسمى المتجهات

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

المكونة من أعمدة A بمتجهات الأعمدة للمصفوفة A . ويسمى الفضاء الجزئي من R^n المنشأ من متجهات الصفوف بفضاء الصفوف للمصفوفة A . ويسمى الفضاء الجزئي من R^m المنشأ من متجهات الأعمدة بفضاء الأعمدة للمصفوفة A .

مثال (٣٧) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

فتكون متجهات الصفوف للمصفوفة A هي

$$r_2 = (3, -1, 4) \quad \text{و} \quad r_1 = (2, 1, 0)$$

ومتجهات الأعمدة للمصفوفة A هي

$$c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ستساعدنا النظرية التالية في إيجاد أساسات للفضاءات الخطية. وستنجز إثباتها إلى نهاية القسم.

نظرية ١٠ : العمليات البسيطة على الصفوف لا تغير فضاء الصفوف لمصفوفة .

ينج من هذه النظرية أن فضاء الصفوف لمصفوفة A لا يتغير باختزال المصفوفة إلى الصورة الصفية المميزة . ونظراً لأن متجهات الصفوف غير الصفرية على الصورة الصفية المميزة تكون دائماً مستقلة خطياً (تمرين ١٤) لذلك فإن هذه المتجهات للصفوف غير الصفرية تكون أساساً لفضاء الصفوف . وعليه نحصل على النتيجة التالية .

نظرية ١١ : متجهات الصفوف غير الصفرية في الصورة الصفية المميزة لمصفوفة تكون أساساً لفضاء الصفوف للمصفوفة A .

مثال (٣٨) :

أوجد أساساً للفضاء المنشأ من المتجهات

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -2, 0, 0, 3) & v_2 &= (2, -5, -3, -2, 6) & v_3 &= (0, 5, 15, 10, 0) \\ v_4 &= (2, 6, 18, 8, 6) \end{aligned}$$

الحل : الفضاء المنشأ من هذه المتجهات هو فضاء الصفوف للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

بوضع هذه المصفوفة على الصورة الصفية المميزة نحصل على (تحقق من هذا)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

متجهات الصفوف غير الصفرية في هذه المصفوفة هي

$$w_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \quad w_2 = (0, 1, 3, 2, 0) \quad w_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

هذه المتجهات تكون أساساً لفضاء الصفوف ومن ثم أساساً للفضاء المنشأ من v_1, v_2, v_3, v_4 .

ملحوظة : لقد كنا نكتب متجهات الصفوف لمصفوفة بصورة أفقية ومتجهات الأعمدة بصورة رأسية (بصورة مصفوفات) لأن هذا يبدو طبيعياً أن نفعله . ولكن على الرغم من ذلك لا يوجد أى سبب يدعونا إلى عدم كتابة متجهات الصفوف في صورة رأسية ومتجهات الأعمدة في صورة أفقية إذا كان هذا ملائماً .

على ضوء هذه الملاحظة يتضح أنه ، فيما عدا التغير من الصورة الأفقية إلى الصورة الرأسية ، فإن فضاء الأعمدة للمصفوفة هو نفسه فضاء الصفوف للمصفوفة المموجة . لذلك يمكننا إيجاد أساس لفضاء الأعمدة للمصفوفة A بإيجاد أساس لفضاء الصفوف للمصفوفة A^t ثم العودة بعد ذلك إلى الصورة الرأسية إذا رغبتنا .

مثال (٣٩) :

أوجد أساس فضاء الأعمدة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

بالتحويل نحصل على

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

الاختزال إلى الصورة الصفية المميزة يعطى (تحقق من هذا)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك فإن المتجهين $(1, 3, 0)$ و $(0, 1, 2)$ يكونان أساسا لفضاء الصفوف للمصفوفة A^t أو بصورة مكافئة

$$w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يكونان أساساً لفضاء الأعمدة للمصفوفة A .

وتعد النظرية التالية واحدة من أهم النتائج الأساسية في الجبر الخطي . ونؤجل إثباتها إلى نهاية هذا القسم .

نظرية ١٢ : إذا كانت A أية مصفوفة فإن فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة للمصفوفة هما نفس البعد .

مثال (٤٠) :

رأيتنا في مثال ٣٩ أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

لها فضاء أعمدة ثنائى البعد . وإذن تؤكد نظرية ١٢ أن فضاء الصفوف أيضاً ثنائى البعد . لإثبات أن هذا فى الواقع ما يحدث تختزل A إلى الصورة الصفية المميزة فنحصل على (تتحقق من هذا)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن هذه المصفوفة لها صفان غير صفريين ، فإن فضاء الصفوف للمصفوفة A ثنائى البعد .

تعريف : بعد فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة للمصفوفة A يسمى برتبة A .

مثال (٤١) :

المصفوفة A فى المثالين ٣٩ ، ٤٠ رتبتهما ٢ .

تصنيف النظرية التالية ثلاث نتائج أخرى إلى تلك الموجودة فى نظرية ١٣ من قسم ١ - ٧ ونظرية ٦ من قسم ٢ - ٣ .

نظرية ١٣ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فإن التقارير التالية متكافئة .

(أ) A قابلة للانعكاس .

(ب) النظام $Ax = 0$ له فقط الحل التافه .

(ج) A تكافئ صفياً I_n .

(د) النظام $Ax = b$ متوافق لأى مصفوفة b من النوع $n \times 1$.

(هـ) $\det(A) \neq 0$

(و) A رتبها n .

(ز) متجهات صفوف A مستقلة خطياً .

(ح) متجهات أعمدة A مستقلة خطياً .

الإثباتات : سوف نثبت أن (ج) ، (و) ، (ز) ، (ح) متكافئة بإثبات التقارير المتتامة

$ج \Leftrightarrow و \Leftrightarrow ز \Leftrightarrow ح \Leftrightarrow ج$. وهذا سوف يكمل البرهان حيث أننا نعلم بالفعل أن (ج) تكافئ (أ) ، (ب) ، (د) ، (هـ) .

$ج \Leftrightarrow و$: حيث أن A تكافئ صفياً I_n ، وحيث أن I_n لها n صف غير صفرى فإن فضاء الصفوف للمصفوفة A له n بعد من نظرية 11 . لذلك A رتبها n .

و \Leftarrow ز : حيث أن A رتبها n ، فإن فضاء الصفوف للمصفوفة A له n بعد حيث أن متجهات الصفوف وعددها n للمصفوفة A تنشئ فضاء صفوف A ، فينتج من نظرية ٩ في قسم ٤ - هـ أن متجهات صفوف A مستقلة خطياً .

ز \Leftarrow ح : افرض أن متجهات صفوف A مستقلة خطياً . لهذا يكون فضاء صفوف A له n بعد . من نظرية ١٢ يكون فضاء أعمدة A أيضاً له n بعد . حيث أن متجهات أعمدة A تنشئ فضاء الأعمدة فإن متجهات أعمدة A مستقلة خطياً من نظرية ٩ في قسم ٤ - هـ .

ح \Leftarrow ج : افرض أن متجهات أعمدة A مستقلة خطياً . لهذا يكون فضاء أعمدة A له n بعد . ومن ثم يكون فضاء صفوف A له n بعد من نظرية ١٢ . وهذا يعنى أن الصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة A بها n من الصفوف غير الصفيرية أى أن جميع الصفوف غير صفيرية . كما لاحظنا في مثال ٢٤ من قسم ٢ - ٣ فإن هذا يحتم أن الصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة A هي I_n . لذلك فإن A تكافئ صفياً I_n .

من المهم أن نلاحظ أن نظرية ١٣ تربط معا جميع المواضيع الرئيسية التى درسناها حتى الآن - المصفوفات ، أنظمة المعادلات ، المحددات والفضاءات الخطية .

نختتم هذا القسم بنتيجة إضافية عن أنظمة المعادلات الخطية . اعتبر نظام المعادلات الخطية

$$Ax = b$$

أو بطريقة مكافئة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

بضرب المصفوفتين في الطرف الأيسر ، يمكن إعادة كتابة هذا النظام

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

أو

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

حيث أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة هو تركيبة خطية من متجهات أعمدة A فينتج أن النظام $Ax = b$ متوافق إذا وفقط إذا كان b تركيبة خطية من متجهات أعمدة A لذلك نحصل على النظرية المفيدة التالية .

نظرية ١٤ : نظام المعادلات الخطية $Ax = b$ يكون متوافقا إذا وفقط إذا كان b في فضاء أعمدة A .

مادة اختيارية :

إثبات نظرية ١٥ : افرض أن متجهات صفوف المصفوفة A هي r_1, r_2, \dots, r_m .

افرض أن B تنتج من A بإجراء عملية بسيطة على الصفوف . سنثبت أن أى متجه في فضاء صفوف B يكون أيضاً في فضاء صفوف A ، وبالعكس أى متجه في فضاء صفوف A يكون في فضاء صفوف B . يمكننا عندئذ استنتاج أن A ، B لهما نفس فضاء الصفوف .

اعتبر الاحتمالات : إذا كانت عملية الصفوف هي إبدال صفين فإن A و B يكون لهما نفس متجهات الصفوف ومن ثم نفس فضاء الصفوف . إذا كانت عملية الصفوف هي ضرب الصف في عدد قياسي أو جمع مضاعف أحد الصفوف إلى الآخر ، فإن متجهات الصفوف r'_1, r'_2, \dots, r'_m للمصفوفة B تكون تركيبات خطية من r_1, r_2, \dots, r_m ولذا تكون في فضاء صفوف A . حيث أن الفضاء الخطي مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب في أعداد قياسية ، فإن جميع التركيبات الخطية من r'_1, r'_2, \dots, r'_m ستقع أيضاً في فضاء صفوف A . لذلك فإن أى متجه في فضاء صفوف B يكون في فضاء صفوف A .

حيث أن B نحصل عليها من A بإجراء عملية صفوف ، فإن A يمكن أن نحصل عليها من B بإجراء العملية العكسية (قسم ١ - ٧) . لهذا فإن الشرح السابق يثبت أن فضاء صفوف A محتوى في فضاء صفوف B .

مادة اختيارية :

إثبات نظرية ١٦ : أرمز لمتجهات صفوف

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

بواسطة

$$r_1, r_2, \dots, r_m$$

افرض أن فضاء صفوف A من بعد k وأن $S = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ هي أساس لفضاء الصفوف ، حيث $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$. حيث أن S أساس لفضاء الصفوف فإن كل متجه صفوف يمكن التعبير عنه كتركيب خطية من b_1, b_2, \dots, b_k لذلك

$$\begin{aligned} r_1 &= c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + \dots + c_{1k}b_k \\ r_2 &= c_{21}b_1 + c_{22}b_2 + \dots + c_{2k}b_k \\ &\vdots \\ r_m &= c_{m1}b_1 + c_{m2}b_2 + \dots + c_{mk}b_k \end{aligned} \quad (4.11)$$

حيث أن المتجهين في R^n يكونان متساويين إذا وفقط إذا كانت المركبات المتناظرة متساوية ، فيمكن مساواة المركبة j من كل طرف من (4 . 11) للحصول على

$$\begin{aligned} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \dots + c_{1k}b_{kj} \\ a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \dots + c_{2k}b_{kj} \\ &\vdots \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \dots + c_{mk}b_{kj} \end{aligned}$$

أو بطريقة مكافئة

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \dots + b_{kj} \begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

الطرف الأيسر من هذه المعادلة هو متجه العمود j للمصفوفة A و $j = 1, 2, \dots, n$ اختيارية . لذلك فإن كل متجه أعمدة للمصفوفة A يقع في الفضاء المنبثق من المتجهات k في الطرف الأيمن من (4 . 12) لذلك فإن فضاء أعمدة A له بعد k .

حيث أن

$$k = \text{بعد (فضاء صفوف } A \text{)}$$

فيكون لدينا

$$\text{بعد (فضاء أعمدة } A \text{)} \geq \text{بعد (فضاء صفوف } A \text{)} \quad (4.13)$$

حيث أن المصفوفة A اختيارية تماما ، فإن هذه النتيجة تطبق على A^t .
أي أن

$$\text{بعد (فضاء أعمدة } A^t \text{)} \geq \text{بعد (فضاء صفوف } A^t \text{)} . \quad (4.14)$$

ولكن تحويل المصفوفة يحول الأعمدة إلى صفوف والصفوف إلى أعمدة ، وإذن :

$$\text{فضاء أعمدة } A^t = \text{فضاء صفوف } A$$

وأيضاً

$$\text{فضاء صفوف } A' = \text{فضاء أعمدة } A$$

لذلك يمكن إعادة كتابة (4.14) على الصورة

$$\text{بعد (فضاء صفوف } A) \geq \text{بعد (فضاء أعمدة } A) .$$

من هذه النتيجة ومن (4.13) نستنتج أن

$$\text{بعد (فضاء صفوف } A) = \text{بعد (فضاء أعمدة } A) .$$

تمارين ٤ - ٦

١ - اكتب متجهات الصفوف ومتجهات الأعمدة للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

في التمارين ٢ - ٥ أوجد : (أ) أساس لفضاء الصفوف ، (ب) أساس لفضاء الأعمدة ، (ج) رتبة المصفوفة :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} - ٤ \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - ٣ \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} - ٢ \\ & \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix} - ٥ \end{aligned}$$

٦ - أوجد أساساً للفضاء الجزئي من R^4 للنشأ من المتجهات المعطاة

$$(1, 1, -4, -3), (2, 0, 2, -2), (2, -1, 3, 2) \quad (أ)$$

$$(-1, 1, -2, 0), (3, 3, 6, 0), (9, 0, 0, 3) \quad (ب)$$

$$(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-2, 0, 2, 2), (0, -3, 0, 3) \quad (ج)$$

٧ - حقق في كل جزء أن فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة لهما نفس البعد (كما هو مؤكد من نظرية ١٢) .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix} (ب) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} (أ) \end{aligned}$$

٨ - (أ) إذا كانت A مصفوفة من النوع 3×5 ، فما هي أكبر قيمة ممكنة لرتبة A ؟

(ب) إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فما هي أكبر قيمة ممكنة لرتبة A ؟

٩ - في كل جزء حدد ما إذا كانت b تقع في فضاء أعمدة A . وإذا كان ذلك ، عبر عن b كتركيب خطية من فضاء الأعمدة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

١٠ - (أ) أثبت : إذا كانت A مصفوفة من النوع 3×5 فإن متجهات أعمدة A غير مستقلة خطيا .

(ب) أثبت : إذا كانت A مصفوفة من النوع 5×3 فإن متجهات صفوف A غير مستقلة خطيا .

١١ - أثبت : إذا كانت A مصفوفة غير مربعة فاما متجهات صفوف A أو متجهات أعمدة A تكون غير مستقلة خطيا .

١٢ - اعتبر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

أثبت : A رتبة ٢ إذا وفقط إذا كان واحدا أو أكثر من المحددات

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

لا يساوى صفرا .

١٣ - أثبت أن نظام المعادلات $Ax = b$ يكون متوافقا إذا وفقط إذا كانت رتبة المصفوفة الممتدة مساوية لرتبة A .

١٤ - أثبت نظرية ١١ .

١٥ - أثبت أن متجهات الصفوف في مصفوفة A من النوع $n \times n$ وقابلة للانمكاس تكون أساسا للفضاء R^n .

٤ - ٧ الفضاء ذو الضرب الداخلي

في قسم ٤ - ١ درسنا الضرب الداخلي الإقليدي في الفضاء الخطي R^n . في هذا القسم سندخل مفهوم الضرب الداخلي في فضاء خطي اختياري . وكنتيجة لعملنا سوف يكون باستطاعتنا تعريف مفاهيم ذات معنى للزاوية والطول والمسافة في فضاءات خطية أكثر تعجبا .

في نظرية ٢ من قسم ٤ - ١ جمعنا الخواص الأكثر أهمية للضرب الداخلي الإقليدي . في فضاء خطي عام يعرف الضرب الداخلي فرضيا باستعمال هذه الخواص كفروض .

تعريف : الضرب الداخلي على فضاء خطي V هو دالة تعطي عددا حقيقيا $\langle u, v \rangle$ لكل زوج من المتجهات u, v من V بطريقة تجعل الفروض التالية متحققة لجميع المتجهات u, v, w في الفضاء V ولجميع الأعداد القياسية k .

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (\text{فرض التماثل})$$

$$(2) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad (\text{فرض التجميع})$$

$$(3) \quad \langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle \quad (\text{فرض التجانس})$$

$$(4) \quad \langle v, v \rangle \geq 0 \quad \text{و} \quad \langle v, v \rangle = 0 \quad (\text{فرض الإيجابية})$$

إذا وفقط إذا كان $v = 0$

يسمى الفضاء الخطي ذو الضرب الداخلي بفضاء ضرب داخلي .

الخواص الإضافية التالية تنتج مباشرة من الفروض الأربعة للضرب الداخلي :

$$(1) \quad \langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$$

$$(2) \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$(3) \quad \langle u, kv \rangle = k \langle u, v \rangle$$

نثبت (2) ونترك (1) ، (3) كتمرينين .

$$(\text{من التماثل}) \quad \langle u, v + w \rangle = \langle v + w, u \rangle$$

$$(\text{من التجميع}) \quad = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$$

$$(\text{من التماثل}) \quad = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

مثال (42) :

لتكن $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ، $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ من نظرية 2 في قسم 4 - 1

يحقق الضرب الداخلي الإقليدي $\langle u, v \rangle = u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$ جميع فروض الضرب الداخلي .

مثال (43) :

إذا كان $v = (v_1, v_2)$ ، $u = (u_1, u_2)$ متجهين في R^2 فإن

$$\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

يعرف ضرب داخلي . لإثبات هذا ، لاحظ أولا أنه إذا أبدلنا في هذه المعادلة v ، u فإن الطرف الأيمن يبقى كما هو . وعليه

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

إذا كان $w = (w_1, w_2)$ فإن

$$\begin{aligned}\langle u + v, w \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.\end{aligned}$$

وهذا يحقق الفرض الثاني .

وأيضاً

$$\begin{aligned}\langle ku, v \rangle &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\ &= k\langle u, v \rangle\end{aligned}$$

وهذا يحقق الفرض الثالث .

أخيراً

$$\langle v, v \rangle = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1^2 + 2v_2^2$$

$$\langle v, v \rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0 \quad \text{و أن} \quad \langle v, v \rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$$

إذا وفقط إذا كان $v_1 = v_2 = 0$ أى إذا وفقط إذا كان $v = (v_1, v_2) = 0$. لذلك فإن الفرض الرابع متحقق .

يختلف الضرب الداخلي في هذا المثال عن الضرب الداخلي الإقليدى في R^2 ، وهذا يبين أن الفضاء الخطى يمكن أن يكون له أكثر من ضرب داخلى واحد .

مثال (44) :

إذا كانت

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$$

أى مصفوفتان من النوع 2×2 فإن الصيغة التالية تعرف ضرباً داخلياً على M_{22} (حقق ذلك) :

$$\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

فتبنا إذا كان

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\langle U, V \rangle = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = 16$$

مثال (٤٥) :

إذا كان

$$q = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad \text{و} \quad p = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

أى متجهين في P_2 ، فإن الصيغة التالية تعرف ضربا داخليا على P_2 (حقق ذلك) :

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

مثال (٤٦) :

(القراء الذين درسوا حساب التفاضل) .

ليكن $p = p(x)$ ، $q = q(x)$ كثيرتي حدود في P_n ، عرف

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x) dx \quad (4.15)$$

حيث a ، b أى عددين حقيقيين ثابتين بحيث يكون $a < b$. سوف نثبت أن (4.15) تعرف ضرب داخلى على P_n .

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x) dx = \int_a^b q(x)p(x) dx = \langle q, p \rangle \quad (١)$$

وهذا يثبت أن الفرض ١ يتحقق .

$$\begin{aligned} \langle p + q, s \rangle &= \int_a^b (p(x) + q(x))s(x) dx \\ &= \int_a^b p(x)s(x) dx + \int_a^b q(x)s(x) dx \\ &= \langle p, s \rangle + \langle q, s \rangle \end{aligned} \quad (٢)$$

وهذا يثبت أن الفرض ٢ يتحقق .

$$\langle kp, q \rangle = \int_a^b kp(x)q(x) dx = k \int_a^b p(x)q(x) dx = k \langle p, q \rangle \quad (٣)$$

وهذا يثبت أن الفرض ٣ يتحقق .

(٤) إذا كانت $p = p(x)$ أية كثيرة حدود في P_n فإن $p^2(x) \geq 0$ لجميع x ، وإذن :

$$\langle p, p \rangle = \int_a^b p^2(x) dx \geq 0$$

وحيث أن $p^2(x) \geq 0$ وأن كثيرات الحدود دوال متصلة فإن $\int_a^b p^2(x) dx = 0$ إذا وفقط إذا

كانت $p(x) = 0$ لجميع x التى تحقق $a \leq x \leq b$. لذلك فإن $\langle p, p \rangle = \int_a^b p^2(x) dx = 0$

إذا وفقط إذا كانت $p = 0$. هذا يحقق الفرض ٤ .

نلاحظ أن الشرح المعطى هنا يمكن أيضاً استخدامه لإثبات أن الفضاء الخطي $C[a, b]$ الذى ناقشناه فى مثال ١٤ هو فضاء ضرب داخلى بالنسبة إلى الضرب الداخلى

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

إذا كان u, v متجهين غير صفريين فى R^3 فإن $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$ حيث θ هى الزاوية بين u, v (قسم ٣ - ٣) . إذا أخذنا مربع كل من طرفى هذه المتساوية واستخدمنا العلاقتين $\|u\|^2 = u \cdot u$ ، $\|v\|^2 = v \cdot v$ و $\cos^2 \theta \leq 1$ نحصل على المتباينة

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$$

تبين لنا النظرية التالية أن هذه المتباينة يمكن أن تعمم إلى أى فضاء ضرب داخلى . وسوف نتمكن من المتباينة الناتجة ، والتى تسمى متباينة كوشى - شوارتز ، من إدخال مفهوم الطول والزاوية فى أى فضاء ضرب داخلى .

نظرية ١٥ : (متباينة كوشى - شوارتز *) إذا كان u, v متجهين فى فضاء ضرب داخلى V فإن

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

الإثبات : ننبه القارئ مقدماً أن الإثبات المقدم هنا يعتمد على حيلة ماهرة ولكنها بلا دافع . إذا كان $u = 0$ فإن $\langle u, v \rangle = \langle u, u \rangle = 0$. فالتطابقة تتحقق بوضوح . افرض الآن أن $u \neq 0$. لتكن $a = \langle u, u \rangle$ ، $b = 2\langle u, v \rangle$ ، $c = \langle v, v \rangle$ وليكن t أى عدد حقيقى . من فرض الإيجابية يكون الضرب الداخلى لأى متجه مع نفسه دائماً غير سالب لذلك :

$$0 \leq \langle (tu + v), (tu + v) \rangle = \langle u, u \rangle t^2 + 2\langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle \\ = at^2 + bt + c$$

تحم هذه المتباينة أن كثيرة الحدود التربيعية $at^2 + bt + c$ يكون لها جذران غير حقيقيين أو جذر حقيقى مكرر . لذلك يجب أن يحقق ميزها أن $0 \leq 4ac - b^2$. التعبير عن a, b, c بدلالة u, v يعطى

$$4\langle u, v \rangle^2 - 4\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \leq 0 \quad \text{أو بصيغة مكافئة} \quad \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

مغال (٤) :

إذا كان $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ أى متجهين فى R^n ، فإن تطبيق متباينة كوشى - شوارتز على u, v يعطى

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$$

وهى ما تسمى بمتباينة كوشى .

* أوجستين لوييس (بارون) كوشى (١٧٨١ - ١٨٥٧) يسمى أحياناً باب التحليل الحديث اذ ساعد فى وضع حساب التفاضل والتكامل على أسس رياضية .
هيرمان أمفدوس شوارتز (١٨٤٣ - ١٩٢١) . رياضى ألماني .

تمارين ٤ - ٧

١ - احسب $\langle u, v \rangle$ باستخدام الضرب الداخلي في مثال ٤٣ .

$$\begin{aligned} (أ) \quad u &= (2, -1), v = (-1, 3) \\ (ب) \quad u &= (0, 0), v = (7, 2) \\ (ج) \quad u &= (3, 1), v = (-2, 9) \\ (د) \quad u &= (4, 6), v = (4, 6) \end{aligned}$$

٢ - كرر تمرين ١ باستخدام الضرب الداخلي الإقليدي على R^2 .

٣ - احسب $\langle u, v \rangle$ باستخدام الضرب الداخلي في مثال ٤٤ .

$$(أ) \quad u = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad u = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

٤ - احسب $\langle p, q \rangle$ باستخدام الضرب الداخلي في مثال ٤٥ .

$$\begin{aligned} (أ) \quad p &= -1 + 2x + x^2 \quad q = 2 - 4x^2 \\ (ب) \quad p &= -3 + 2x + x^2 \quad q = 2 + 4x - 2x^2 \end{aligned}$$

٥ - ليكن $u = (u_1, u_2)$ ، $v = (v_1, v_2)$. أثبت أن ما يلي هو ضرب دخل على R^2 .

$$\begin{aligned} (أ) \quad \langle u, v \rangle &= 6u_1v_1 + 2u_2v_2 \\ (ب) \quad \langle u, v \rangle &= 2u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2 \end{aligned}$$

٦ - ليكن $u = (u_1, u_2, u_3)$ ، $v = (v_1, v_2, v_3)$. حدد أيًا مما يلي يكون ضربًا داخليًا على R^3 .

في الحالات التي لا يكون فيها الضرب داخليًا اذكر الفروض التي لا تتحقق .

$$\begin{aligned} (أ) \quad \langle u, v \rangle &= u_1v_1 + u_3v_3 \\ (ب) \quad \langle u, v \rangle &= u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 \\ (ج) \quad \langle u, v \rangle &= 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3 \\ (د) \quad \langle u, v \rangle &= u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3 \end{aligned}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} \quad \text{ليكن}$$

أثبت أن $\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$ ضرب داخلي على M_{22} .

٨ - لنكن $p = p(x)$ ، $q = q(x)$ كثيرتي حدود من P_2 . أثبت أن

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1/2)q(1/2) + p(1)q(1)$$

٩ - حقق متباينة كوشي - شوارتز لكل من

$$(أ) \quad u = (2, 1) \quad v = (1, -3) \quad \text{باستخدام الضرب الداخلي في مثال ٤٣}$$

$$(ب) \quad u = (2, 1, 5) \quad v = (1, -3, 4) \quad \text{باستخدام الضرب الداخلي الإقليدي}$$

$$(ج) \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

باستخدام الضرب الداخلي في مثال ٤٤

$$(د) \quad p = -1 + 2x + x^2 \quad q = 2 - 4x^2 \quad \text{باستخدام الضرب الداخلي في مثال ٤٥ .}$$

١٠ - اعتبر R^2 له الضرب الداخلي الإقليدى . طبق متباينة كوشى - شوارتز على المتجهين $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ، $\mathbf{u} = (a, b)$ لإثبات أن $|a \cos \theta + b \sin \theta|^2 \leq a^2 + b^2$.

١١ - أثبت أنه إذا كان $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ أى ضرب داخلى ، فإن $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$.

١٢ - أثبت أنه إذا كان $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ أى ضرب داخلى و k أى عدد قياسى ، فإن $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

١٣ - أثبت أنه فى متباينة كوشى - شوارتز يتحقق التساوى إذا و فقط إذا كان \mathbf{u} ، \mathbf{v} غير مستقلين خطيا .

١٤ - لتكن c_1, c_2, c_3 أعدادا حقيقية موجبة وليكن $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

أثبت أن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1 u_1 v_1 + c_2 u_2 v_2 + c_3 u_3 v_3$ هو ضرب داخلى على R^3 .

١٥ - لتكن c_1, c_2, \dots, c_n أعدادا حقيقية موجبة وليكن $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ،

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ أثبت أن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1 u_1 v_1 + c_2 u_2 v_2 + \dots + c_n u_n v_n$ هو ضرب داخلى على R_n .

١٦ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) استخدم الضرب الداخلى

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

لحساب $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ للمتجهين $\mathbf{p} = p(x)$ ، $\mathbf{q} = q(x)$ فى P_3 :

$$\mathbf{p} = 1 - x + x^2 + 5x^3 \quad \mathbf{q} = x - 3x^2 \quad (\text{أ})$$

$$\mathbf{p} = x - 5x^5 \quad \mathbf{q} = 2 + 8x^2 \quad (\text{ب})$$

١٧ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) استخدم الضرب الداخلى

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

فى حساب $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ للمتجهين $\mathbf{f} = f(x)$ ، $\mathbf{g} = g(x)$ فى $C[0, 1]$:

$$\mathbf{f} = \cos 2\pi x \quad \mathbf{g} = \sin 2\pi x \quad (\text{أ})$$

$$\mathbf{f} = x \quad \mathbf{g} = e^x \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{f} = \tan \frac{\pi}{4} x \quad \mathbf{g} = 1 \quad (\text{ج})$$

١٨ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين متصلتين

على $[0, 1]$. أثبت :

$$\left[\int_0^1 f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \left[\int_0^1 f^2(x) dx \right] \left[\int_0^1 g^2(x) dx \right] \quad (\text{أ})$$

$$\left[\int_0^1 [f(x) + g(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_0^1 f^2(x) dx \right]^{1/2} + \left[\int_0^1 g^2(x) dx \right]^{1/2} \quad (\text{ب})$$

(ارشاد : استخدم متباينة كوشى - شوارتز والضرب الداخلى فى مثال ١٧) .

٤ - ٨ الطول والزاوية في الفضاءات ذات الضرب الداخلي

نستخدم في هذا القسم متباينة كوشي - شوارتز لتطوير مفاهيم الطول والمسافة والزاوية في الفضاءات العامة ذات الضرب الداخلي .

تعريف : إذا كان V فضاء ضرب داخلي فإن معيار (أو طول) متجه u يرمز له بالرمز $\|u\|$ ويعرف بواسطة

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$$

والمسافة بين نقطتين (متجهين) u, v يرمز لها بالرمز $d(u, v)$ وتعرف بواسطة

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

مثال (٤٨) :

إذا كان $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ متجهين في R^n مع الضرب الداخلي الإقليدي فإن

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = \langle u - v, u - v \rangle^{1/2} \\ &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \end{aligned}$$

لاحظ أن هذين هما بالضبط صيغتا المعيار الإقليدي والمسافة الأقليدية اللتين ناقشنا في قسم ٤ - ١ .

مثال (٤٩) :

نفرض أن R^2 له الضرب الداخلي $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ الذي ناقشنا في مثال ٤٣ . إذا كان $u = (1, 0)$ ، $v = (0, 1)$ فإن

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{1/2} = \sqrt{3}$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = \langle (1, -1), (1, -1) \rangle^{1/2} \\ &= [3(1)(1) + 2(-1)(-1)]^{1/2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

من المهم أن نحفظ في ذاكرتنا أن المعيار والمسافة يعتمدان على الضرب الداخلي المستخدم . إذا تغير الضرب الداخلي فإن المعيار والمسافات بين المتجهات تتغير . فمثلاً إذا كان R^2 له الضرب الداخلي الإقليدي فإن معيار المتجه u في المثال السابق هو 1 ، والمسافة بين u, v هي $\sqrt{2}$.

قد يتعرض القارئ هنا على استخدامنا لمصطلحي الطول والمسافة للكتيبتين $\langle u, u \rangle^{1,2}$ ، $\|u - v\|$ ، بالرغم من أن هاتين الصيغتين المعرفتين للطول والمسافة قد نشأتا بتقليد الصيغتين في R^2 ، R^3 ، فإن النتائج الغريبة التي حصلنا عليها في مثال ٤٩ تلى بعض الشك على الحكمة في هذين التعريفين . لأن الأمر يتطلب تخيالا واسعا حتى نقر أن طول المتجه $u = (1, 0)$ هو $\sqrt{3}$ ونعطي الآن بعض الحجج لتأييد هذين التعريفين .

خلال أعوام كثيرة قرر الرياضيون ما يمكن اعتباره بالخواص الأكثر أهمية للطول والبعد الإقليدي في R^2 ، R^3 وهذه الخواص المذكورة في شكل ٤ - ٨ .

الخواص الأساسية للمسافة	الخواص الأساسية للطول
١ م $d(u, v) \geq 0$	ط ١ $\ u\ \geq 0$
٢ م $d(u, v) = 0$ إذا وفقط إذا كان $u = v$	ط ٢ $\ u\ = 0$ إذا وفقط إذا كان $u = 0$
٣ م $d(u, v) = d(v, u)$	ط ٣ $\ ku\ = k \ u\ $
٤ م $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (متباينة المثلث)	ط ٤ $\ u + v\ \leq \ u\ + \ v\ $ (متباينة المثلث)

(شكل ٤ - ٨)

نبرر النظرية التالية تعريف الميعار والمسافة في فضاء ضرب داخلي .

نظرية ١٦ : إذا كان V فضاء ضرب داخلي ، فإن الميعار $\langle u, u \rangle^{1/2}$ والمسافة $d(u, v) = \|u - v\|$ يحققان جميع الخواص المذكورة في شكل ٤ - ٨

نثبت الخاصية ط ٤ ونترك إثباتات بقية الأجزاء كتمرينات . قبل البدء في الإثبات نلاحظ أن متباينة كوشي شوارتز .

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

يمكن كتابتها في صور بديلة . حيث أن $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ ، $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ فيمكن كتابتها بالصيغة

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 \quad (4.16)$$

أو بعد أخذ الجذر التربيعي بالصيغة

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad (4.17)$$

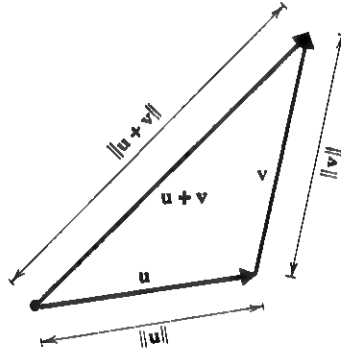
إثبات الخاصية ط ٤ : من التعريف

$$\begin{aligned}
 \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\
 &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\
 &\leq \langle u, u \rangle + 2|\langle u, v \rangle| + \langle v, v \rangle \\
 &\leq \langle u, u \rangle + 2\|u\| \|v\| + \langle v, v \rangle \quad (\text{by 4.17}) \\
 &= \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\
 &= (\|u\| + \|v\|)^2.
 \end{aligned}$$

أعط الجذر التربيعي يعطى

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad \blacksquare$$

في R^2 ، R^3 تنص النتيجة التي برهنت الآن على الحقيقة الهندسية المعروفة أن مجموع طول ضلعين من المثلث على الأقل يساوى طول الضلع الثالث (شكل ٤ - ٩) .



(شكل ٤ - ٩)

افرض أن u ، v متجهين غير صفريين في فضاء ضرب داخل V . يمكن إعادة كتابة متباينة كوشي - شوارتز كما هي معطاة في (4.16) على الصورة

$$\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right)^2 \leq 1$$

أو بصيغة مكافئة

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

ونتيجة لهذه الحقيقة ، توجد زاوية وحيدة θ بحيث يكون

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \quad (4.18)$$

نعرف θ بأنها الزاوية بين المتجهين u ، v لاحظ أنه في R^2 أو R^3 مع الضرب الداخلى الإقليدى ، تتفق (4.18) مع الصيغة العادية لجيب تمام الزاوية بين متجهين غير صفريين (قسم ٣ - ٣ من الباب الثالث) .

مثال (٥٠) :

أوجد جيب تمام الزاوية θ بين المتجهين

$$v = (-2, 1, 2, 3) \quad \text{و} \quad u = (4, 3, 1, -2)$$

حيث الفضاء الخطي هو R^4 مع ضرب الداخلي الإقليدي

الحل :

$$\langle u, v \rangle = -9 \quad \text{و} \quad \|v\| = \sqrt{18} \quad \|u\| = \sqrt{30}$$

إذا

$$\cos \theta = -\frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = -\frac{3}{\sqrt{30}\sqrt{2}}$$

مثال (٥١) :

إذا كان M_{22} له ضرب الداخلي المعطى في مثال ٤ ، فإن الزاوية بين المصفوفتين

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هي $\pi/2$ لأن

$$\cos \theta = \frac{U \cdot V}{\|U\| \|V\|} = \frac{1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0)}{\|U\| \|V\|} = 0$$

إذا كان u, v متجهين غير صفريين بحيث يكون $\langle u, v \rangle = 0$ فإنه ينتج من (4. 18) أن $\cos \theta = 0$ وأن $\theta = \pi/2$. وهذا يجعلنا نقترح المصطلح التالي .

تعريف : في فضاء ضرب داخلي ، يسمى المتجهان u, v ، متعامدين إذا كان $\langle u, v \rangle = 0$. علاوة على هذا ، إذا كان u عموديا على كل متجه في فئة W ، فإننا نقول أن u عمودي على W .

ونؤكد على أن التعمد يعتمد على اختيار الضرب الداخلي . يمكن لمتجهين أن يكونا متعامدين بالنسبة إلى ضرب داخلي معين ولكن ليس بالنسبة إلى آخر .

مثال (٥٢) :

(للقرء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل)

لتكن P_2 لها الضرب الداخلي

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

الذي نوقش في مثال ٤٦ . وليكن

$$p = x, \quad q = x^2$$

فيكون

$$\|p\| = \langle p, p \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^1 x x \, dx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^1 x^2 \, dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|q\| = \langle q, q \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^1 x^2 x^2 \, dx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^1 x^4 \, dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 x x^2 \, dx = \int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0$$

لأن $\langle p, q \rangle = 0$ فإن المتجهين $p = x$ ، $q = x^2$ يكونان متعامدين بالنسبة إلى الضرب الداخلي المعطى .

نختتم هذا القسم بتعميم هام ومفيد لحقيقة معروفة .

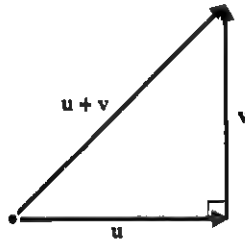
نظرية ١٧ : (تعميم نظرية فيثاغورث) . إذا كان u ، v متجهين متعامدين في فضاء ضرب داخلي فإن

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

الإثبات :

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle (u + v), (u + v) \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

لاحظ أنه في R^2 أو R^3 مع الضرب الداخلي الإقليدي تختزل هذه النظرية إلى نظرية فيثاغورث العادية (شكل ٤ - ١٠) .



(شكل ٤ - ١٠)

تمارين ٤ - ٨

١ - ليكن R^2 له الضرب الداخلي $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ حيث $u = (u_1, u_2)$ ، $v = (v_1, v_2)$. أو
جد $\|w\|$ عندما

$$w = (-1, 3) \quad (أ) \quad w = (6, 7) \quad (ب) \quad w = (0, 1) \quad (ج) \quad w = (0, 0) \quad (د)$$

٢ - كرر تمرين ١ باستخدام الضرب الداخلي الإقليدى فى R^2 .

٣ - ليكن P_2 له الضرب الداخلي الموجود فى مثال ٤٥ . أوجد $\|p\|$ عندما

$$p = -1 + 2x + x^2 \quad (أ) \quad p = 3 - 4x^2 \quad (ب)$$

٤ - ليكن M_{22} له الضرب الداخلي الموجود فى مثال ٤٤ . أوجد $\|A\|$ عندما

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

٥ - ليكن R^2 له الضرب الداخلى الموجود فى تمرين ١ . أوجد $d(x, y)$ عندما

$$x = (-1, 2), y = (2, 5) \quad (أ) \quad x = (3, 9), y = (3, 9) \quad (ب)$$

٦ - كرر تمرين ٥ باستخدام الضرب الداخلي الاقليدى فى R^2 .

٧ - ليكن P_2 له الضرب الداخلي الموجود فى مثال ٤٤ . أوجد $d(p, q)$ عندما

$$p = 2 - x + x^2, \quad q = 1 + 5x^2$$

٨ - ليكن M_{22} له الضرب الداخلي الموجود فى مثال ٤٤ . أوجد $d(A, B)$ عندما

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

٩ - لتكن R^2, R^3, R^4 لها الضرب الداخلي الإقليدى . فى كل جزء أوجد جيب تمام الزاوية بين v, u .

$$u = (-1, 0), v = (3, 8) \quad (ب) \quad u = (1, -3), v = (2, 4) \quad (أ)$$

$$u = (4, 1, 8), v = (1, 0, -3) \quad (د) \quad u = (-1, 5, 2), v = (2, 4, -9) \quad (ج)$$

$$u = (2, 1, 7, -1), v = (4, 0, 0, 0) \quad (و) \quad u = (1, 0, 1, 0), v = (-3, -3, -3, -3) \quad (هـ)$$

١٠ - ليكن P_2 له الضرب الداخلي الموجود فى مثال ٤٥ . أوجد جيب تمام الزاوية بين p, q .

$$p = -1 + 5x + 2x^2 \quad q = 2 + 4x - 9x^2 \quad (أ)$$

$$p = x - x^2 \quad q = 7 + 3x + 3x^2 \quad (ب)$$

١١ - ليكن M_{22} له الضرب الداخلي الموجود فى مثال ٤٤ . أوجد جيب تمام الزاوية بين B, A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

١٢ - ليكن R^3 له الضرب الداخلي الإقليدى . لآى من قيم k يكون u, v متعامدين ؟

$$u = (2, 1, 3) \quad v = (1, 7, k) \quad (أ)$$

$$u = (k, k, 1) \quad v = (k, 5, 6) \quad (ب)$$

١٣ - ليكن P_2 له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٥ . أثبت أن $p = 1 - x + 2x^2$ و $q = 2x + x^2$ متعامدان .

١٤ - ليكن M_{22} له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٤ . حدد أيا مما يلى يكون عموديا على

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} (د) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (ب) \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} (أ)$$

١٥ - ليكن R^4 له الضرب الداخلى الإقليدى . أوجد متجهين لهما المعيار 1 ويكونان عموديين على كل المتجهات $u = (2, 1, -4, 0), v = (-1, -1, 2, 2), w = (3, 2, 5, 4)$.

١٦ - ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت أنه إذا كان w عموديا على كل من u_1, u_2 فإنه يكون عموديا على $k_1 u_1 + k_2 u_2$ لآى عددين قياسيين k_1, k_2 . فسر هذه النتيجة هندسيا فى R^3 بالنسبة إلى الضرب الداخلى الإقليدى .

١٧ - ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت أنه إذا كان w عموديا على كل من المتجهات u_1, u_2, \dots, u_r فإنه يكون عموديا على أى متجه فى $\text{lin} \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$.

١٨ - ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت أنه إذا كان u, v متجهين متعامدين فى V بحيث يكون $\|u\| = \|v\| = 1$ فإن $\|u - v\| = \sqrt{2}$.

١٩ - ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت المتساوية

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

للمتجهات فى V .

٢٠ - ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت المتساوية :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\|u + v\|^2 - \frac{1}{2}\|u - v\|^2$$

للمتجهات فى V .

٢١ - ليكن $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ أساساً لفضاء ضرب داخلى . أثبت أن المتجه الصفري هو المتجه الوحيد العمودى على كل متجهات الأساس .

٢٢ - ليكن v متجهاً فى فضاء ضرب داخلى V .

- (أ) أثبت أن فئة جميع المتجهات فى V العمودية على v تكون فضاء جزئياً فى V .
(ب) صف هذا الفضاء الجزئى هندسياً فى R^2, R^3 مع الضرب الداخلى الإقليدى .

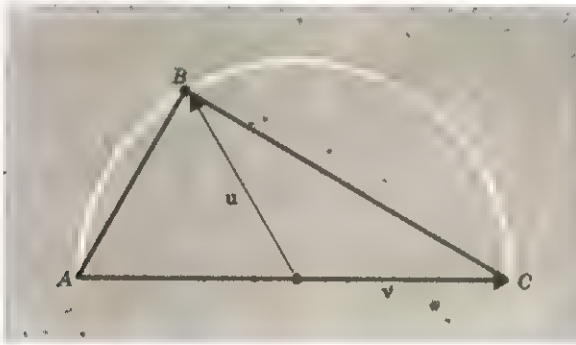
٢٣ - أثبت التعميم التالى لنظرية ١٧ . إذا كانت v_1, v_2, \dots, v_r متجهات متعامدة متنى متنى فى فضاء ضرب داخلى V فإن

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_r\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_r\|^2$$

٢٤ - أثبت الأجزاء التالية من نظرية ١٦ .

- (أ) الجزء ط ١ (ب) الجزء ط ٢ (ج) الجزء ط ٣ (د) الجزء م ١
(هـ) الجزء م ٢ (و) الجزء م ٣ (ز) الجزء م ٤

٢٥ - استخدم طرق المتجهات لإثبات أن المثلث المرسوم داخل دائرة وأحد أضلاعه هو قطر الدائرة يجب أن يكون قائم الزاوية (إرشاد : عبر عن المتجهين \vec{AB} و \vec{BC} فى الشكل التالى بدلالة u و v).



٢٦ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) ليكن $C[0, \pi]$ له الضرب الداخلى .

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$$

ولتكن $f_n = \cos nx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). أثبت أنه إذا كان $k \neq l$ فإن $f_l \perp f_k$ متعامدان بالنسبة إلى الضرب الداخلى المعطى .

٤ - ٩ الأساسات المعيارية المتعامدة - عملية جرام - شميدت

فى كثير من المسائل المتعلقة بالفضاءات الخطية يكون اختيار أساس للفضاء متروكا لحرية من يقوم بحل المسألة . ومن الطبيعى أن أفضل استراتيجية هو اختيار الأساس بحيث يبسط حل المسألة المعروضة . فى فضاءات الضرب الداخلى ، تكون الحالة غالبا أن أفضل اختيار هو الأساس الذى فيه جميع المتجهات متعامدة كل على الآخر . سنبين فى هذا القسم كيف يمكن بناء مثل هذا الأساس .

تعريف : تسمى فئة متجهات فى فضاء ضرب داخلى بفئة متعامدة إذا كان أى متجهين معينين فى الفئة متعامدين . الفئة المتعامدة التى فيها كل متجه معياره 1 تسمى الفئة المعيارية المتعامدة .

مثال (٥٣) :

ليكن

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

الفئة $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ هي عيارية متعامدة إذا كان R^3 له الضرب الداخلي الإقليدي ، إذ أن

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = 0$$

وأيضاً

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$$

مثال (٥٤) :

إذا كان v متجهاً غير صفري في فضاء ضرب داخلي ، فمن الخاصة ٣ في شكل ٤ - ٨ يكون

المتجه

$$\frac{1}{\|v\|} v$$

له المعيار 1 إذ أن

$$\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

هذه العملية لضرب متجه غير صفري v في مقلوب طوله للحصول على متجه معياره 1 تسمى بجعل v

عيارى .

أهمية إيجاد أساس عيارى متعامد لفضاءات الضرب الخطي تظهر جزئياً من النظرية التالية التى تبين أنه من البساطة بدرجة غير عادية أن نعبر عن متجه بدلالة أساس عيارى متعامد .

نظرية ١٨ : إذا كان $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً عيارياً متعامداً لفضاء ضرب داخلي V

وكان u أى متجه في V ، فإن

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

الإثباتات : حيث أن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ هو أساس ، فإن المتجه u يمكن أن يعبر عنه

بالصيغة .

$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

سيكفل الإثبات ببيان أن $k_i = \langle u, v_i \rangle$ for $i = 1, 2, \dots, n$ ، لكل متجه v_i في S يكون

$$\begin{aligned} \langle u, v_i \rangle &= \langle k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n, v_i \rangle \\ &= k_1 \langle v_1, v_i \rangle + k_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + k_n \langle v_n, v_i \rangle \end{aligned}$$

حيث أن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فئة عيارية متعامدة ، يكون

$$\text{if } j \neq i \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{و} \quad \langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1,$$

لذلك تبسط المعادلة السابقة إلى

$$\langle u, v_i \rangle = k_i \quad \#$$

مثال (٥٥) :

ليكن

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = (-\frac{4}{3}, 0, \frac{3}{3}), \quad v_3 = (\frac{3}{3}, 0, \frac{4}{3})$$

من السهل التأكد بأن $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ هو أساس عيارى متعامد في R^3 مع الضرب الداخلي الإقليدى . عبر عن المتجه $u = (1, 1, 1)$ كتركيب خطية من المتجهات في S .

الحل :

$$\langle u, v_3 \rangle = \frac{7}{3} \quad \text{و} \quad \langle u, v_2 \rangle = -\frac{1}{3} \quad \langle u, v_1 \rangle = 1$$

إذا من نظرية ١٨

$$u = v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{7}{3}v_3$$

أى أن

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \frac{1}{3}(-\frac{4}{3}, 0, \frac{3}{3}) + \frac{7}{3}(\frac{3}{3}, 0, \frac{4}{3})$$

فائدة نظرية ١٨ يجب أن تكون واضحة من هذا المثال إذا تذكرنا أنه للاساس غير العيارى المتعامد يكون من الضرورى حل نظام من المعادلات لكى نعبر عن المتجه بدلالة الأساس .

نظرية ١٩ : إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فئة متعامدة من المتجهات غير الصفريية في فضاء ضرب داخلى ، فإن S تكون مستقلة خطيا .

الإثبات : افرض أن

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0 \quad (4.19)$$

لكى نبين أن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مستقلة خطيا، يجب أن نثبت أن $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.
ينتج من (4.19) أنه لكل v_i من S

$$\langle k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0$$

أو بصيغة مكافئة

$$k_1\langle v_1, v_i \rangle + k_2\langle v_2, v_i \rangle + \dots + k_n\langle v_n, v_i \rangle = 0$$

من تعامد متجهات S ، $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ عندما $i \neq j$ لذلك تختزل هذه المعادلة إلى

$$k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

حيث أنه من المفترض أن المتجهات في S غير صفرية ، فإن $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$ من فرض الإيجابية الضرب الداخلي . إذ $k_i = 0$. حيث أن الدليل i اختياري ، فيكون $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. لهذا تكون S مستقلة خطياً .

مثال (٥٦) :

في مثال ٥٣ أثبتنا أن

$$\mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ و } \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$$

تكون فئة عيارية متعامدة بالنسبة إلى الضرب الداخلي الاقليدي في R^3 . من نظرية ١٩ تكون هذه المتجهات فئة مستقلة خطياً . لهذا حيث أن R^3 ثلاث الأبعاد فإن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ تكون أساساً عيارياً متعامداً للفضاء R^3 .

نتجه الآن إلى مسألة بناء أساس عيارى متعامد لفضاء ضرب داخلي . يناقش إثبات النتيجة التمهيدية التالية في التمارين بنهاية هذا القسم .

نظرية ٢٠ : اعتبر فضاء ضرب داخلي و $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ فئة عيارية متعامدة من المتجهات في V . إذا كان W يدل على الفضاء المنشأ من $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ ، فإن أى متجه \mathbf{u} في V يمكن التعبير عنه بالصيغة .

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

حيث \mathbf{w}_1 في W و \mathbf{w}_2 عمودى على W وذلك بأخذ

$$\mathbf{w}_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r \quad (4.20)$$

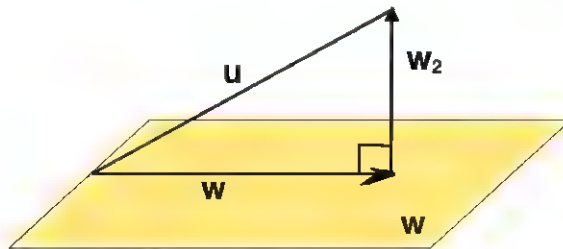
وأيضاً

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \dots - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r \quad (4.21)$$

(أنظر شكل ٤ - ١١ لتوضيح في R^3 .)

بايعاز من شكل ٤ - ١١ سنسمى المسقط العمودى للمتجه \mathbf{u} على W ونرمز له بالرمز $\text{proj}_W \mathbf{u}$.

ويسمى المتجه $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$ بمركبة \mathbf{u} العمودية على W .



(شكل ٤ - ١١)

مثال (٥٧) :

اعتبر R^3 له الضرب الداخلي الإقليدي واعتبر W هو الفضاء الجزئي المنشأ من المتجهين العياريين المتعامدين $v_1 = (0, 1, 0)$ و $v_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$. المسقط العمودي للمتجه $u = (1, 1, 1)$ على W هو

$$\begin{aligned} \text{proj}_W u &= \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 \\ &= (1)(0, 1, 0) + (-\frac{1}{5})(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) \\ &= (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) \end{aligned}$$

مركبة u العمودية على W هي

$$u - \text{proj}_W u = (1, 1, 1) - (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) = (\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25})$$

لاحظ أن $u - \text{proj}_W u$ عمودي على كل من v_1 و v_2 ولذلك فإن هذا المتجه يكون عموديا على أى متجه فى الفضاء W المنشأ من v_1 و v_2 كما يجب أن يكون .
نحن الآن على استعداد لإثبات النتيجة الرئيسية لهذا القسم .

نظرية ٢١ : كل فضاء ضرب داخلي غير صفري ذو بعد منتهى له أساس عيارى متعامد .

الإثبات : اعتبر V أى فضاء ضرب داخلي غير صفري من بعد n واعتبر $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أى أساس للفضاء V . ستنتج المتتابعة التالية من الخطوات أساسا عياريا متعامدا $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ للفضاء V .

الخطوة ١ - ليكن $v_1 = u_1 / \|u_1\|$ المتجه v_1 معياره 1 .

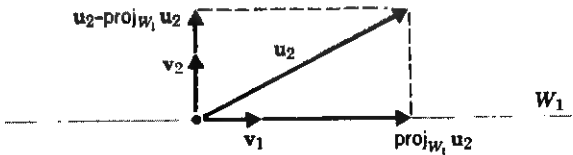
الخطوة ٢ - لبناء متجه v_2 معياره 1 ويكون عموديا على v_1 فإننا نحسب مركبة u_2 العمودية على الفضاء W_1 المنشأ من v_1 ثم نجعل معياره الوحدة . أى أن

$$v_2 = \frac{u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2}{\|u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2\|} = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$$

(شكل ٤ - ١٢) . بالطبع إذا كان $u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = 0$ ، فلا يمكننا أن نجرى عملية جعل المعيار الوحدة . ولكن هذا لا يمكن حدوثه ، وإلا كان لدينا

$$u_2 = \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|u_1\|} u_1$$

الذى ينص على أن u_2 مضاعف للمتجه u_1 ، وهو ما يتناقض مع الاستقلال الخطى للأساس $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

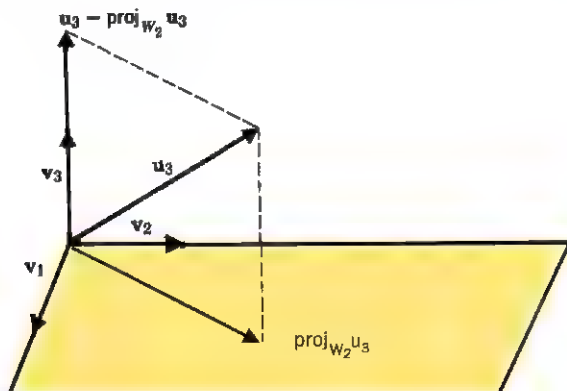


(شكل ٤ - ١٢)

الخطوة ٣ . لبناء متجه v_3 معياره 1 ويكون عموديا على كل من v_1 ، v_2 ، فإننا نحسب مركبة u_3 العمودية على الفضاء W_2 المنشأ من v_1 ، v_2 ثم نجعل معياره الوحدة (شكل ٤ - ١٣) أي أن

$$v_3 = \frac{u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3}{\|u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3\|} = \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\|u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2\|}$$

كما في الخطوة ٢ فإن الاستقلال الخطي للأساس $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ يضمن أن



(شكل ٤ - ١٣)

لذلك فإن عملية جعل المعيار يساوى الوحدة يمكن دائما إجراؤها .

نترك التفاصيل كتمرين .

خطوة ٤ - لتحديد متجه v_4 معياره 1 ويكون عموديا على v_1 ، v_2 ، v_3 فإننا نحسب مركبة u_4 العمودية على الفضاء W_3 المنشأ من v_1 ، v_2 ، v_3 ثم نجعل معياره الوحدة . فيكون

$$v_4 = \frac{u_4 - \text{proj}_{W_3} u_4}{\|u_4 - \text{proj}_{W_3} u_4\|} = \frac{u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3}{\|u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3\|}$$

بالاستمرار على هذا المنوال سنحصل على فئة عيارية متعامدة من المتجهات $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ حيث أن V من n بعدا وأن كل فئة عيارية متعامدة تكون مستقلة خطيا فإن الفئة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تكون أساساً عيارياً متعامداً للفضاء V .

تسمى عملية البناء خطوة بخطوة السابقة لتحويل أى أساس اختياري إلى أساس عيارى متعامد بعملية جرام - شميدت * .

* يورجين بيدرسن جرام (١٨٥٠ - ١٩١٦) . اكتوبر دانهامكي .
ايهارد شميدت (١٨٧٦ - ١٩٥٩) رياضى المانى .

مثال (٥٨) :

اعتبر الفضاء الخطي R^3 مع الضرب الداخلي . طبق عملية جرام شميدت لتحويل الأساس $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)$ إلى أساس عيارى متعامد .

الحل :

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{الخطوة ١ :}$$

$$\begin{aligned} u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2 &= u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 \\ &= (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \end{aligned} \quad \text{الخطوة ٢ :}$$

إذا

$$v_2 = \frac{u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2}{\|u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2\|} = \frac{3}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3 = u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 \quad \text{الخطوة ٣ :}$$

$$\begin{aligned} &= (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

إذا

$$v_3 = \frac{u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3}{\|u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3\|} = \sqrt{2} \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

هذا فإن

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), v_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

تكون أساسا عياريا متعامدا للفضاء R^3 .

النتائج التالية لعملية جرام - شميدت لها العديد من التطبيقات ، البعض منها قد نوقش في قسم ٧ - ٢ . سيكون عند القارئ الخلفية لقراءة هذه التطبيقات بعد إكمال هذا القسم الاختياري .

نظرية ٢٢ : (نظرية الإسقاط) . إذا كان W فضاءاً جزئياً من بعد منتهى لفضاء ضرب داخل V فإن كل متجه u في V يمكن التعبير عنه بطريقة واحدة على الصورة

$$u = w_1 + w_2$$

حيث w_1 يكون من W و w_2 يكون عمودياً على W .

الإثبات : للإثبات جزئاً . أولاً يجب أن نوجد متجهين w_1 ، w_2 بالخواص المذكورة وبعد ذلك يجب أن نثبت أنهما المتجهان الوحيدان بهذه الصفة .

بواسطة عملية جرام - شميدت يوجد أساس عياري متعامد $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ للفضاء W . أى أن $W = \text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$. وإذن من نظرية ٢٠ سيكون للمتجهين .

$$w_2 = u - \text{proj}_W u \quad \text{و} \quad w_1 = \text{proj}_W u$$

الخواص المذكورة في هذه النظرية . لإثبات أن هذين هما المتجهان الوحيدان بهذه الخواص . نفرض أنه يمكننا أيضاً كتابة

$$u = w'_1 + w'_2 \quad (4.22)$$

حيث w'_1 يكون من W ، w'_2 يكون عمودياً على W . إذا طرحنا من (4.22) المعادلة

$$u = w_1 + w_2$$

نحصل على

$$0 = (w'_1 - w_1) + (w'_2 - w_2)$$

أو

$$w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2 \quad (4.23)$$

حيث أن w_2 ، w'_2 عموديان على W فإن الفرق بينهما يكون أيضاً عمودياً على W ، حيث أنه يمكننا لأي متجه w في W أن نكتب

$$\langle w, w'_2 - w_2 \rangle = \langle w, w'_2 \rangle - \langle w, w_2 \rangle = 0 - 0 = 0$$

ولكن $w'_2 - w_2$ هو ذاته متجه في W حيث أنه من (4.23) الفرق بين متجهين في الفضاء الجزئي W . لهذا فإن $w'_2 - w_2$ يجب أن يكون عمودياً على نفسه ، أى أن

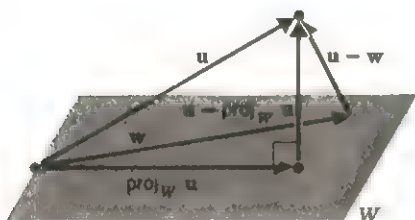
$$\langle w'_2 - w_2, w'_2 - w_2 \rangle = 0$$

ولكن هذا يحتم أن $w'_2 - w_2 = 0$ من الفرض ، والضرب الداخلى . وعليه فإن $w'_2 = w_2$ ومن (4.23) يكون $w'_1 = w_1$.

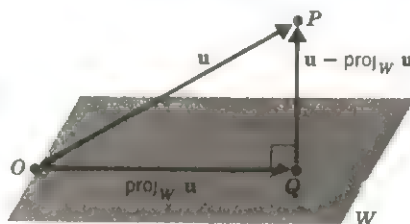
إذا كانت P نقطة في فضاء ثلاثى عادى وكان W مستويا مارا بنقطة الأصل ، فنحصل على النقطة Q من W الأقرب إلى P باسقاط عمود من P على W (شكل ٤ - ١٤ أ) . لهذا إذا افترضنا $u = \overrightarrow{OP}$ ، فإن المسافة بين P و W تعطى بواسطة

$$\|u - \text{proj}_W u\|$$

وبعبارة أخرى ، من بين جميع المتجهات w في W ، فإن المتجه $w = \text{proj}_W u$ يجعل المسافة $\|u - w\|$ أصغر ما يمكن (شكل ٤ - ١٤ ب) .



(ب)



(أ)

(شكل ٤ - ١٤)

توجد طريقة أخرى للتفكير في هذه الفكرة . أنظر إلى u كتجه ثابت نود أن نقربه بمتجه من W . أى تقريب w سينتج عنه « متجه الخطأ »

$$u - w$$

الذى لا يمكن جعله مساويا للمتجه الصفري ، إلا إذا كان u في W ولكن باختيار

$$w = \text{proj}_W u$$

يمكننا جعل طول متجه الخطأ

$$\|u - w\| = \|u - \text{proj}_W u\|$$

صغير قدر الإمكان . لهذا يمكننا وصف $\text{proj}_W u$ بأنه « التقريب الأمثل » للمتجه u بمتجهات من W . ستجمل النظرية التالية هذه الأفكار البديهية أكثر انضباطا .

نظرية ٢٣ : (نظرية التقريب الأمثل) . إذا كان W فضاء جزئيا من بعد منتهى لفضاء ضرب داخلي V وكان u متجها في V فإن $\text{proj}_W u$ هو التقريب الأمثل للمتجه u من W بمعنى أن

$$\|u - \text{proj}_W u\| < \|u - w\|$$

لكل متجه w من W يختلف عن $\text{proj}_W u$.

الإثبات : يمكننا لى متجه w في W أن نكتب

$$u - w = (u - \text{proj}_W u) + (\text{proj}_W u - w) \quad (4.24)$$

ولكن $u - \text{proj}_W u$ لكونه الفرق بين متجهين من W . يكون في W ، وأيضاً $u - w$ يكون عمودياً على W . لهذا فيكون الحدان في الطرف الأيمن من (4.24) متعامدين . إذا من نظرية فيثاغورث (نظرية ١٧ من قسم ٤ - ٨) :

$$\|u - w\|^2 = \|u - \text{proj}_W u\|^2 + \|\text{proj}_W u - w\|^2$$

إذا كان $w \neq \text{proj}_W u$ فإن الحد الثاني في هذا المجموع يكون موجبا لهذا

$$\|u - w\|^2 > \|u - \text{proj}_W u\|^2$$

أو بصيغة مكافئة

$$\|u - w\| > \|u - \text{proj}_W u\| \quad \blacksquare$$

تمتلى تطبيقات النظريتين السابقتين في قسم ٧ - ٢ .

تمارين ٤ - ٩

١ - اعتبر R^2 له الضرب الداخلي الإقليدى . أى مما يلى يكون فئة عيارية متعامدة ؟

$$(1, 0), (0, 2) \quad (أ) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (ب)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (ج) \quad (1, 0), (0, 0) \quad (د)$$

٢ - اعتبر R^2 له الضرب الداخلي الإقليدى . أى مما يلى يكون فئة عيارية متعامدة ؟

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (أ)$$

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad (ب)$$

$$(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1) \quad (ج)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad (د)$$

٣ - اعتبر في P_2 الضرب الداخلي الموجود في مثال ٥ . أى مما يلى يكون فئة عيارية متعامدة ؟

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, x^2 \quad (ب) \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2 \quad (أ)$$

٤ - اعتبر في M_{22} الضرب الداخلي الموجود في مثال ٤٢ . أى مما يلى يكون فئة عيارية متعامدة ؟

$$(أ) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$(ب) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$٥ - اعتبر \quad x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad و \quad y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}} \right)$$

أثبت أن $\{x, y\}$ تكون عيارية متعامدة إذا كان R^2 له الضرب الداخلي $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ ولا تكون عيارية متعامدة إذا كان R^2 له الضرب الداخلي الإقليدى .

٦ - أثبت أن

$$u_1 = (1, 0, 0, 1), u_2 = (-1, 0, 2, 1), u_3 = (2, 3, 2, -2), u_4 = (-1, 2, -1, 1)$$

فئة متعامدة في R^4 مع الضرب الداخلي الإقليدى . يحمل معيار كل من هذه المتجهات الوحدة ، احصل على فئة عيارية متعامدة .

٧ - اعتبر P^2 له الضرب الداخلي الإقليدى . استخدم عملية جرام - شميدت لتحويل الأساس $\{u_1, u_2\}$ إلى أساس عيارى متعامد .

$$(أ) \quad u_1 = (1, -3), u_2 = (2, 2) \quad (ب) \quad u_1 = (1, 0), u_2 = (3, -5)$$

٨ - اعتبر R^3 له الضرب الداخلي الإقليدى . استخدم عملية جرام - شميدت لتحويل الأساس $\{u_1, u_2, u_3\}$ إلى أساس عيارى متعامد .

$$(أ) \quad u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 2, 1)$$

$$(ب) \quad u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (3, 7, -2), u_3 = (0, 4, 1)$$

٩ - اعتبر R^4 له الضرب الداخلي الإقليدى . استخدم عملية جرام - شميدت لتحويل الأساس $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ إلى أساس عيارى متعامد .

$$u_1 = (0, 2, 1, 0), u_2 = (1, -1, 0, 0), u_3 = (1, 2, 0, -1), u_4 = (1, 0, 0, 1)$$

١٠ - اعتبر R^3 له الضرب الداخلي الإقليدى . أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء الجزئى المنشأ من $(0, 1, 2)$ و $(-1, 0, 1)$

١١ - اعتبر R^3 له الضرب الداخلي $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. استخدم عملية جرام - شميدت لتحويل

$$u_1 = (1, 1, 1) \quad u_2 = (1, 1, 0) \quad u_3 = (1, 0, 0)$$

إلى أساس عيارى متعامد .

١٢ - الفضاء الجزئي من R^3 المنشأ من المتجهين $u_1 = (\frac{4}{3}, 0, -\frac{3}{2})$ and $u_2 = (0, 1, 0)$ هو مستوى يمر بنقطة الأصل . عبر عن $w = (1, 2, 3)$ بالصورة $w = w_1 + w_2$ حيث w_1 يقع في المستوى و w_2 يكون عموديا على المستوى .

١٣ - كرر التمرين ١٢ مع $u_1 = (1, 1, 1)$ و $u_2 = (2, 0, -1)$

١٤ - اعتبر R^4 له الضرب الداخلي الإقليدي . عبر عن $w = (-1, 2, 6, 0)$ بالصورة $w = w_1 + w_2$ حيث w_1 يكون من الفضاء W المنشأ من $u_1 = (-1, 0, 1, 2)$ و $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ و w_2 يكون عموديا على W .

١٥ - اعتبر $\{v_1, v_2, v_3\}$ أساسا عياريا متعامدا لفضاء ضرب داخل V . أثبت أنه إذا كان w متجهها في V فإن $\|w\|^2 = \langle w, v_1 \rangle^2 + \langle w, v_2 \rangle^2 + \langle w, v_3 \rangle^2$.

١٦ - اعتبر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساسا عياريا متعامدا لفضاء ضرب داخل V . أثبت أنه إذا كان w متجهها في V فإن

$$\|w\|^2 = \langle w, v_1 \rangle^2 + \langle w, v_2 \rangle^2 + \dots + \langle w, v_n \rangle^2$$

١٧ - في الخطوة ٣ من إثبات نظرية ٢١ ، ذكر أن « الاستقلال الخطي للفترة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ يضمن أن

$$u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 \neq 0$$

أثبت هذا التقرير .

١٨ - أثبت نظرية ٢٠ .

(ارشاد : أثبت أن المتجه w_1 في (4.20) يقع في W ، والمتجه w_2 في (4.21) يكون عموديا على W وأن $w = w_1 + w_2$.

١٩ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) اعتبر أن الفضاء الخطي P_2 له الضرب الداخلي

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

طبق عملية جرام - شميدت لتحويل الأساس المعتاد $S = \{1, x, x^2\}$ إلى أساس عيارى متعامد . (تسمى كثيرات الحدود في الأساس الناتج بالثلاثة الأول من كثيرات حدود ليجندر التي معيارها الوحدة)

٢٠ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) استخدام نظرية ١٦ للتعبير عما يلي كتراكيب خطية من الثلاثة الأول من كثيرات حدود ليجندر التي معيارها الوحدة

$$(أ) 1 + x + 4x^2 \quad (ب) 2 - 7x^2 \quad (ج) 4 + 3x$$

٢١ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) اعتبر P_2 له الضرب الداخلي

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

طبق عملية جرام - شميدت لتحويل الأساس المعتاد $S = \{1, x, x^2\}$ إلى أساس عيارى متعامد .

٢٢ - (للقراء الذين درسوا المادة الاختيارية في هذا القسم) . أوجد النقطة Q في المستوى $5x - 3y + z = 0$ الأقرب إلى النقطة $P(1, -2, 4)$ ، وحدد المسافة بين النقطة P والمستوى (أرشاد : انظر إلى المستوى كفضاء جزئي W من R^3 مع الضرب الداخلي الإقليدي * طبق نظرية ٢٣) .

٢٣ - (للقراء الذين درسوا المادة الاختيارية في هذا القسم) . أوجد النقطة Q على المستقيم

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= t \\ z &= 4t \end{aligned} \quad x < t < +\infty$$

الأقرب إلى النقطة $P(-4, 8, 1)$. (أرشاد : أنظر الإرشاد في التمرين السابق) .

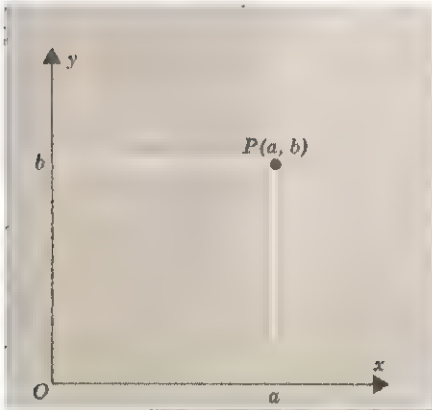
٤ - ١٠ الإحداثيات - تغيير الأساس

توجد علاقة قوية بين مفهوم الأساس ومفهوم نظام الإحداثيات . تطور هذه الفكرة في هذا القسم وندقق أيضاً بعض النتائج عن تغيير الأساسات للفضاءات الخطية .

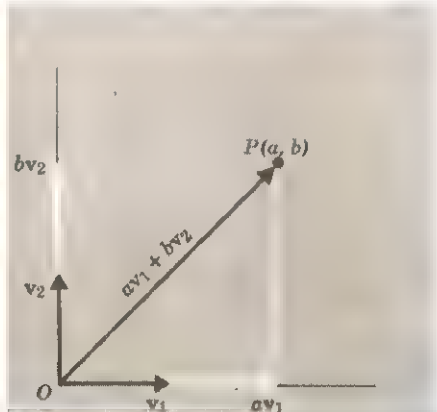
في الهندسة التحليلية المستوية نخص النقطة P في المستوى بزوج من الإحداثيات (a, b) باستخدام محاور إحداثيات متعامدة . ولكن يمكن أيضاً إدخال إحداثيات بدون الاستناد إلى محاور الإحداثيات وذلك باستخدام المتجهات . فثلاً بدلاً من إدخال محوري إحداثيات كما في شكل ٤ - ١٥ أ فإلنا نفرض متجهين متعامدين v_1, v_2 طول كل منهما ١ وهما نفس نقطة البداية O . (ويكون هذان المتجهان أساساً للفضاء R^2) . باسقاط عمودين من النقطة P على المستقيمين المحددين من v_1, v_2 نحصل على المتجهين av_1, bv_2 حيث

$$\overrightarrow{OP} = av_1 + bv_2$$

(شكل ٤ - ١٥ ب) من الواضح أن العددين a, b اللذين حصلنا عليهما الآن هما نفسيهما إحداثيا P بالنسبة إلى نظام الإحداثيات في شكل ٤ - ١٥ أ لذلك يمكن أن ننظر إلى إحداثي P بأنها العددين اللذان نحتاج إليهما للتعبير عن المتجه \overrightarrow{OP} بدلالة متجهي الأساس v_1, v_2 .



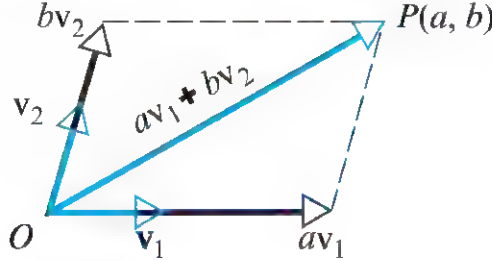
(أ)



(ب)

(شكل ٤ - ١٥)

ليس من الضروري لهدف إعطاء إحداثيات للنقط في المستوى أن يكون متجهي الأساس v_1, v_2 متعامدين أو طول كل منهما 1 ، فأى أساس للفضاء R^2 سيكون . فثلا باستخدام متجهي الأساس v_1, v_2 في شكل ٤ - ١٦ ، يمكننا إعطاء زوج وحيد من الأحداثيات للنقطة P بإسقاط P موازية لمتجهي الأساس



(شكل ٤ - ١٦)

لكي نجعل \overline{OP} هو قطر متوازي الأضلاع المحدد بمتجهين av_1, bv_2 أى

$$\overline{OP} = av_1 + bv_2$$

يمكننا اعتبار (a, b) مركبتى P بالنسبة إلى الأساس $\{v_1, v_2\}$. هذه الفكرة المعممة لمفهوم الأحداثيات هامة لأنها يمكن أن تمتد إلى فضاءات خطية أكثر تعميما ولكن سنحتاج أولا إلى بعض النتائج الأولية .

افرض $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساسا لفضاء خطي V له بعد منتهى . حيث أن S تنشئ V ، فإن أى متجه في V يمكن التعبير عنه كتركيب خطية من متجهات S . بالإضافة إلى ذلك فإن الاستقلال الخطي لمتجهات S يضمن وجود طريقة واحدة فقط للتعبير عن أى متجه كتركيب خطية من متجهات S لمعرفة السبب ، افرض أن متجها v يمكن كتابته على الصورة

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \quad \text{وأيضاً}$$

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

طرح المعادلة الثانية من الأولى يعطى

$$0 = (c_1 - k_1)v_1 + (c_2 - k_2)v_2 + \dots + (c_n - k_n)v_n$$

حيث أن الطرف الأيمن من هذه المعادلة هو تركيب خطية من متجهات S ، فإن الاستقلال الخطي لمتجهات S يحتم أن

$$c_1 - k_1 = 0, \quad c_2 - k_2 = 0, \dots, c_n - k_n = 0 \quad \text{أى أن}$$

$$c_1 = k_1, \quad c_2 = k_2, \dots, c_n = k_n$$

وتلخيصا لما سبق لدينا النتيجة التالية

نظرية ٢٤ : إذا كان $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساسا للفضاء الخطي V ، فإن أى متجه v من V يمكن التعبير عنه بالصيغة $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ بطريقة واحدة لا غير .

إذا كان $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً لفضاء خطي V ذي بعد منتهى وكان

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

هو التعبير عن v بدلالة الأساس S ؟ فإن الأعداد القياسية c_1, c_2, \dots, c_n تسمى بأحداثيات v بالنسبة إلى الأساس S . ويرمز لمتجه إحداثيات v بالنسبة إلى S بالرمز $(v)_S$ وهو المتجه من R^n المعروف بواسطة

$$(v)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

ويرمز لمصفوفة إحداثيات v بالنسبة إلى S بالرمز $[v]_S$ وهي المصفوفة من النوع $n \times 1$ المعرفة بواسطة

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

مثال (٥٩) :

في مثال ٢٨ من قسم ٤ - ه أثبتنا أن $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ هو أساس لفضاء R^3 حيث

$$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 9, 0), \text{ and } v_3 = (3, 3, 4)$$

(أ) أوجد متجه الأحداثيات ومصفوفة الأحداثيات للمتجه $v = (5, -1, 9)$ بالنسبة إلى S .

(ب) أوجد المتجه v في R^3 الذي يكون متجه إحداثياته بالنسبة إلى S هو $(v)_S = (-1, 3, 2)$

الحل (أ) : يجب أن نوجد أعدادا قياسية c_1, c_2, c_3 بحيث يكون

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

أو بدلالة المركبات

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

مساواة المركبات المتناظرة يعطى

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5$$

$$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1$$

$$c_1 + 4c_3 = 9$$

بحل هذا النظام نحصل على $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 2$. إذا

$$[v]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (v)_S = (1, -1, 2)$$

الحل (ب) : باستخدام تعريف متجه الأحداثيات $(v)_S$ ، نحصل على

$$v = (-1)v_1 + 3v_2 + 2v_3 = (11, 31, 7)$$

تعتمد متجهات ومصفوفات الإحداثيات على التركيب الذى نكتب به متجهات الأساس ، فأى تغيير فى ترتيب متجهات الأساس يسبب تغييرا مناظرا فى ترتيب المكونات فى مصفوفات الإحداثيات ومتجهات الإحداثيات .

مثال (٦٠) :

اعتبر الأساس $S = \{1, x, x^2\}$ للفضاء P_2 . بالمعينة يكون متجه الإحداثيات ومصفوفة الإحداثيات لكثيرة الحدود $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ بالنسبة إلى S هـ

$$[p]_S = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (p)_S = (a_0, a_1, a_2)$$

مثال (٦١) :

اعتبر أننا أدخلنا محاور إحداثيات متعامدة xyz فى فضاء ثلاثى واعتبر الاساس المعتاد $S = \{i, j, k\}$ ، حيث

$$i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0), \quad \text{and} \quad k = (0, 0, 1)$$

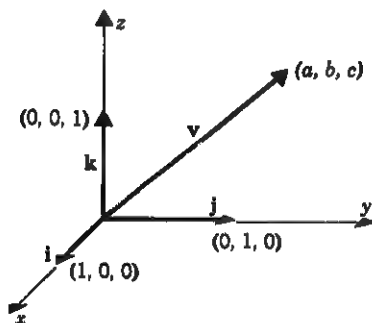
إذا كان ، كما فى شكل ٤ - ١٧ ، $v = (a, b, c)$ هو أى متجه فى R^3 فإن

$$v = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = ai + bj + ck$$

وهذا يعنى أن

$$v = (a, b, c) = (v)_S$$

بعبارة أخرى فإن مركبات المتجه v بالنسبة إلى نظام الإحداثيات المتعامدة xyz هى نفسها مركبات v بالنسبة إلى الأساس المعتاد $\{i, j, k\}$



(شكل ٤ - ١٧)

مثال (٦٢) :

إذا كان $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساسا عياريا متعامدا لفضاء ضرب داخلى V ، فإنه من نظرية ١٨ فى قسم ٤ - ٩ يكون التعبير عن متجه u بدلالة الأساس S هو

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

وهذا يعنى أن

$$(u)_S = (\langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle, \dots, \langle u, v_n \rangle)$$

وأيضاً

$$[u]_S = \begin{bmatrix} \langle u, v_1 \rangle \\ \langle u, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, v_n \rangle \end{bmatrix}$$

فعلاً إذا كان

$$v_1 = (0, 1, 0), v_2 = (-\frac{4}{3}, 0, \frac{3}{5}), v_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{3})$$

فكما لاحظنا في مثال ٥ هـ من قسم ٤ - ٩ ، يكون $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ أساساً عيارياً متعامداً للفضاء R^3 بالنسبة إلى الضرب الداخلي الإقليدى . إذا كان $u = (2, -1, 4)$ ، فإن

$$\langle u, v_1 \rangle = -1, \langle u, v_2 \rangle = \frac{4}{3}, \langle u, v_3 \rangle = \frac{22}{5}$$

إذا

$$[u]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{22}{5} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (u)_S = (-1, \frac{4}{3}, \frac{22}{5})$$

الأساسات العيارية المتعامدة لفضاءات الضرب الداخلي تكون مناسبة وذلك لأنه ، كما تبين النظرية التالية ، تتحقق الكثير من الصيغ المألوفة في مثل هذه الفضاءات .

نظرية ٢ هـ : إذا كانت S أساساً عيارياً متعامداً لفضاء ضرب داخلي من بعد n وكان

$$(v)_S = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \text{و} \quad (u)_S = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

فإن

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \quad (\text{أ})$$

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} \quad (\text{ب})$$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \quad (\text{ج})$$

ناقش الإثباتات ، وبمض الأمثلة العددية في التمارين .

نعود الآن إلى المسألة الأساسية في هذا القسم .

مسألة تغيير الأساس : إذا غيرنا الأساس لفضاء خطى من أساس معين قديم B إلى أساس معين جديد B' ،

فكيف ترتبط مصفوفة الأحداثيات القديمة $[v]_B$ للمتجه v بمصفوفة الأحداثيات الجديدة $[v]_{B'}$ ؟

للتبسيط سنحل هذه المسألة للفضاء الخطى الثنائى . ويكون الحل للفضاء ذى n بعداً مماثلاً وسيترك كتمرين . ليكن

$$B' = \{u'_1, u'_2\} \quad \text{و} \quad B = \{u_1, u_2\}$$

الأساسان القديم والجديد على الترتيب . سنحتاج إلى مصفوفتي الإحداثيات لتجهي الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس الجديد . لنفرض أنهما

$$[u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

أي أن

$$u_1 = au'_1 + bu'_2 \quad (4.23)$$

$$u_2 = cu'_1 + du'_2$$

ليكن v أي متجه في V ولتكن

$$[v]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

هي مصفوفة الإحداثيات القديمة ، فيكون

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 \quad (4.25)$$

لإيجاد إحداثيات v الجديدة يجب أن نعبر عن v بدلالة الأساس الجديد B' . لإجراء ذلك نموض من (4.23) في (4.25) ، وهذا يعطى

$$v = k_1(au'_1 + bu'_2) + k_2(cu'_1 + du'_2)$$

$$v = (k_1 a + k_2 c)u'_1 + (k_1 b + k_2 d)u'_2$$

إذا مصفوفة إحداثيات v الجديدة هي

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{bmatrix}$$

التي يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

أو من (4.24) على الصورة

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [v]_B$$

تنص هذه المعادلة على أن مصفوفة الإحداثيات الجديدة $[v]_{B'}$ يمكن الحصول عليها بضرب مصفوفة

الإحداثيات القديمة $[v]_B$ من اليسار بالمصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

التي يكون عموداها إحداثيات متجهي الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس الجديد (أنظر 4.22) لهذا يكون

لدينا الحل التالي لمسألة تغيير الأساس :

حل مسألة تغيير الأساس : إذا غيرنا الأساس لفضاء خطي V من أساس معين قديم $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ إلى أساس معين جديد $B' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ فإن مصفوفة الأحداثيات القديمة $[v]_B$ للمتجه v ترتبط بمصفوفة الأحداثيات الجديد $[v]_{B'}$ بواسطة المعادلة

$$[v]_{B'} = P[v]_B \quad (4.26)$$

حيث أعمدة P هي مصفوفات الأحداثيات لمتجهات الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس الجديد ، أى أن أعمدة P هي

$$[u_1]_{B'}, [u_2]_{B'}, \dots, [u_n]_{B'}$$

شكليا يمكن كتابة المصفوفة P على الصورة

$$P = \begin{bmatrix} [u_1]_{B'} & [u_2]_{B'} & \cdots & [u_n]_{B'} \end{bmatrix}$$

وتسمى مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

مثال (٦٢) :

اعتبر الأساسين

$$B' = \{u'_1, u'_2\} \quad \text{و} \quad B = \{u_1, u_2\}$$

لفضاء R^2 حيث

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; u'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

(ب) استخدم (4.26) لإيجاد $[v]_{B'}$ إذا كان

$$v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل (أ) : أولا يجب أن نجد مصفوفة الأحداثيات لمتجهي الأساس القديم u_1, u_2 بالنسبة إلى الأساس الجديد B' . باتباع الطريقة في مثال ٩٥ يجب أن يكون القارئ قادرا على إثبات أن

$$u_1 = -u'_1 + u'_2$$

$$u_2 = 2u'_1 - u'_2$$

(تحقق من هذا) ، إذا

$$[u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة الانتقال من B إلى B' هي

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل (ب) : بالمعينة :

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

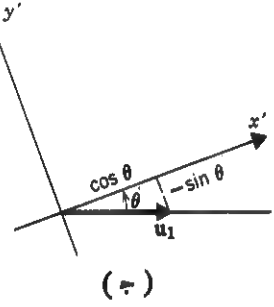
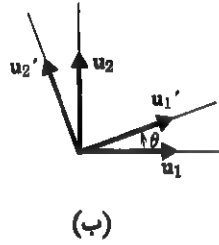
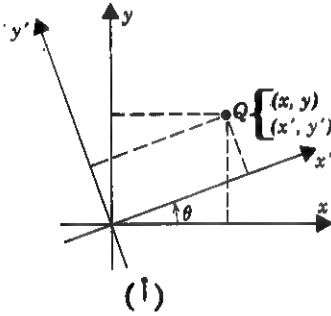
لهذا باستخدام (4.26) ومصفوفة الانتقال في الجزء (أ) ، يكون

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

قد يرغب القارئ في التأكد من هذه النتيجة بالتحقق من أن $v = 3u'_1 + 5u'_2$.

مثال (٩٤) : (تطبيق في دوران محاور الأحداثيات) :

في كثير من المسائل يعطى نظام إحداثيات لا x متعامد ونحصل على نظام إحداثيات جديد x' بدوران النظام لا x حول نقطة الأصل في اتجاه عكس عقارب الساعة زاوية θ . عندما يحدث هذا فإن أى نقطة Q في المستوى يكون لها فئتان من الأحداثيات : الأحداثيات (x, y) بالنسبة إلى النظام لا x والأحداثيات (x', y') بالنسبة إلى النظام لا x' (شكل ١٨ - أ) .



(شكل ١٨ - أ)

بادخال متجهى وحدة u_1 و u_2 على محورى x ، y الموجبين ومتجهى وحدة u'_1 و u'_2 على محورى x' و y' الموجبين يمكننا أن نعتبر هذا الدوران كتغيير من أساس قديم $B = \{u_1, u_2\}$ إلى أساس جديد $B' = \{u'_1, u'_2\}$ (شكل ١٨ - ب) . فتكون الأحداثيات الجديدة (x', y') والأحداثيات القديمة (x, y) للنقطة Q مرتبطة بواسطة

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

حيث P هي مصفوفة الانتقال من B إلى B' . لإيجاد P يجب أن نحدد مصفوفتي الأحداثيات لمتجهي الأساس القديم u_1 ، u_2 بالنسبة إلى الأساس الجديد . كما هو موضح في شكل ٤ - ١٨ ج فإن مركبتى u_1 في الأساس الجديد هما $\cos \theta$ and $-\sin \theta$ لهذا فإن

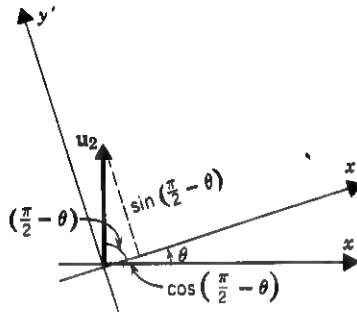
$$[u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix}$$

بينما ، كما هو مبين في شكل ٤ - ١٨ د إلى ، فإن مركبتى u_2 في الأساس الجديد هما $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$ ، $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$ لهذا فإن

$$[u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

إذا مصفوفة الانتقال من B إلى B' هي

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



(شكل ٤ - ١٨ د)

وتصبح (4.27)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

أو بصيغة مكافئة

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

فثلا إذا دار المحوران بزاوية $\theta = 45^\circ$ ، فبما أن

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

فإن (4.28) تصبح

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

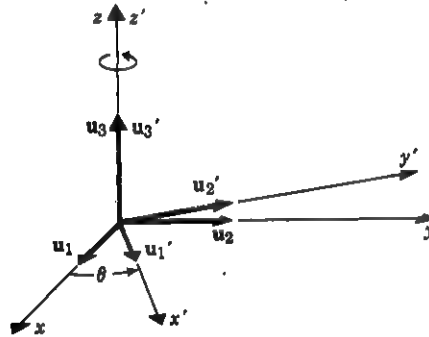
فإذا كانت الأحداثيات القديمة للنقطة Q هي $(x, y) = (2, -1)$ فإن

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

لذا تكون الأحداثيات الجديدة للنقطة Q هي $(x', y') = (1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$.

مثال (٦٥) : (تطبيق على دوران المحاور في الفضاء الثلاثي) :

نفرض أن نظام أحداثيات متعامد xyz قد أدير حول محور z في عكس اتجاه عقارب الساعة (بالنظر من أسفل محور z الموجب) زاوية θ (شكل ٤ - ١٩). إذا أدخلنا متجهات وحدة u_1, u_2, u_3 على محاور x, y, z ، الموجبة ومتجهات وحدة u'_1, u'_2, u'_3 على محاور x', y', z' الموجبة



(شكل ٤ - ١٩)

فيمكننا أن نعتبر الدوران كعملية تغيير من الأساس القديم $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ إلى الأساس الجديد $B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$. على ضوء مثال ٦٤ يجب أن يكون واضحاً أن

$$[u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

وعلاوة على ذلك ، حيث أن u_3 يمتد وحدة واحدة إلى أعلى محور z' الموجب فإن

$$[u_3]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذا مصفوفة الانتقال من B إلى B' هي

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتكون الأحداثيات القديمة (x, y, z) للنقطة Q مرتبطة بأحداثياتها الجديدة (x', y', z') بالعلاقة

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

مثال (٦٦) :

اعتبر المتجهات

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

في مثال ٦٣ أوجدنا مصفوفة الانتقال من الأساس $B = \{u_1, u_2\}$ للفضاء R^2 إلى الأساس $B' = \{u'_1, u'_2\}$ ومع هذا يمكننا الآن أيضاً أن نسأل عن مصفوفة الانتقال من B' إلى B . للحصول على هذه المصفوفة فإننا ببساطة نغير من وجهة نظرنا ونعتبر B' هو الأساس القديم و B هو الأساس الجديد . كالمعتاد أعمدة مصفوفة الانتقال ستكون أحداثيات متجهات الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس الجديد .

بالمعينة

$$u'_1 = u_1 + u_2$$

$$u'_2 = 2u_1 + u_2$$

إذا

$$[u'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [u'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذا فإن مصفوفة الانتقال من B' إلى B هي

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا ضربنا مصفوفة الانتقال من B إلى B' التي حصلنا عليها في مثال ٦٣ ومصفوفة الانتقال من B' إلى B التي حصلنا عليها في هذا المثال نجد أن

$$PQ = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

وهو ما يثبت أن $Q = P^{-1}$. وهذا ليس بصدفة كما تبين لنا النظرية التالية .

نظرية ٢٦ : إذا كانت P هي مصفوفة الانتقال من أساس B إلى أساس B' فإن P تكون قابلة للعكاس .

(ب) P^{-1} هي مصفوفة الانتقال من B' إلى B .

(نرجى الإثبات إلى نهاية هذا القسم) . تلخيصا لما سبق . إذا كانت P هي مصفوفة الانتقال من أساس B إلى أساس B' ، فيكون لاي متجه v :

$$[v]_{B'} = P[v]_B$$

$$[v]_B = P^{-1}[v]_{B'}$$

تبين لنا النظرية التالية أنه إذا كانت مصفوفة الانتقال P من أساس عيارى متعامد إلى أساس عيارى متعامد آخر فإن معكوس P يكون إيجاداه على درجة خاصة من السهولة .

نظرية ٢٧ : إذا كانت P مصفوفة الانتقال من أساس عيارى متعامد إلى أساس عيارى متعامد آخر لفضاء ضرب داخلي فإن

$$P^{-1} = P^t$$

(نحذف الإثبات .)

لتوضيح هذه النتيجة ، اعتبر مصفوفة الانتقال

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

التي حصلنا عليها في مثال ٦٤ عندما أدرنا محاور الإحداثيات (ومن ثم غيرنا الأساس العيارى المتعامد $\{u_1, u_2\}$ في شكل ٤ - ١٨ ب إلى الأساس العيارى المتعامد $\{u'_1, u'_2\}$. من السهل التحقق أن

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

إذا $P^{-1} = P^t$.

تعريف : المصفوفة المربعة A التي لها الخاصية

$$A^{-1} = A^t$$

يقال أنها مصفوفة عمودية .

لذا تنص نظرية ٢٧ على أن مصفوفة الانتقال من أساس عيارى متعامد إلى آخر تكون دائماً عمودية .
النتيجة التالية ، التى يناقش إثباتها فى التمارين ، تجعل من السهل تحديد متى تكون مصفوفة A من النوع $n \times n$ عمودية .

نظرية ٢٨ : العبارات التالية متكافئة :

- (أ) A عمودية .
(ب) متجهات صفوف A تكون فئة عيارية متعامدة فى R^n بالنسبة إلى الضرب الداخلى الأقليدى .
(ج) متجهات أعمدة A تكون فئة عيارية متعامدة فى R^n بالنسبة إلى الضرب الداخلى الأقليدى .

مثال (٦٧) :

اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

متجهات صفوف A هي

$$r_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad r_2 = (0, 0, 1), \quad r_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

بالنسبة إلى الضرب الداخلى الأقليدى يكون

$$\|r_1\| = \|r_2\| = \|r_3\| = 1$$

وأيضاً

$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_3 = r_1 \cdot r_3 = 0$$

وعليه فإن متجهات صفوف A تكون فئة عيارية متعامدة فى R^3 . إذا A عمودية ويكون

$$A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(سيجد القارئ أنه من المفيد تعليمياً أن يتأكد أن متجهات أعمدة A أيضاً تكون فئة عيارية متعامدة .)

في مثالي ٦٤ ، ٦٥ ذكرنا مسألة الربط بين الأحداثيات القديمة والأحداثيات الجديدة عندما يحدث تغيير هندسي (دوران) في محاور الأحداثيات . في بعض الأحيان تظهر المسألة المكسية التالية .

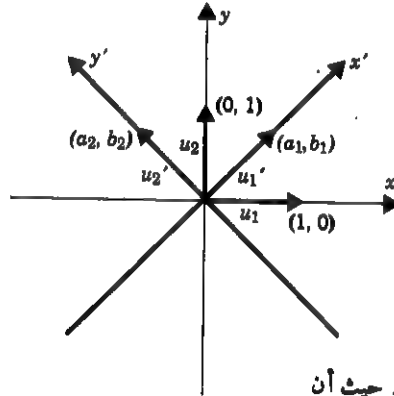
توجد علاقة معروفة

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

بين الأحداثيات القديمة والأحداثيات الجديدة ، حيث المصفوفة من النوع 2×2 عمودية . ومن المرغوب فيه أن نحدد كيف يرتبط هندسيا نظام أحداثيات xy ونظام أحداثيات $x'y'$. تسمى المعادلة (4.29) تحويل أحداثيات عمودي في R^2 . لدراسة تأثير تحويل أحداثيات عمودي ، اعتبر المتجهات

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u'_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, u'_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

في نظام الأحداثيات xy ثم أدخل نظام أحداثيات $x'y'$ بحيث يكون محور x' الموجب في اتجاه u'_1 ومحور y' الموجب في اتجاه u'_2 (شكل ٤ - ٢٠) . لأنه من المفترض أن المصفوفة 2×2 في (4.29) عمودية فإن المتجهين u'_1 ، u'_2 يكونان متعامدين وهذا يؤكد



(شكل ٤ - ٢٠)

أن محوري x' ، y' متعامدان . حيث أن

$$u'_1 = a_1 u_1 + b_1 u_2$$

وأيضاً

$$u'_2 = a_2 u_1 + b_2 u_2$$

فإن المصفوفة

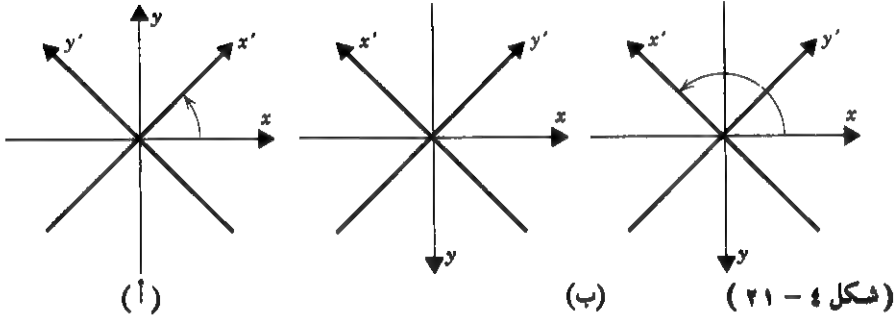
$$Q = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

في (4.29) تكون مصفوفة الانتقال من الأساس $\{u'_1, u'_2\}$ إلى الأساس $\{u_1, u_2\}$.

من الواضح أنه يوجد احتمالان إما أن نظام الأحداثيات $x'y'$ يمكن الحصول عليه بدوران نظام الأحداثيات xy (شكل ٤ - ٢١ أ) ، أو أن نظام الأحداثيات $x'y'$ يمكن الحصول عليه أولاً بانعكاس نظام الأحداثيات xy بالنسبة إلى محور x ثم دوران نظام الأحداثيات المنعكس (شكل ٤ - ٢١ ب). قد أثبت في التمارين أن محدد مصفوفة عمودية هو دائماً $+1$ أو -1 ، وعلاوة على هذا يمكن إثبات أن تحويل الأحداثيات العمودي (4.29) يكون دوراناً إذا كان

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 1$$

ويكون انعكاساً متبوعاً بدوران إذا كان هذا المحدد -1 .



بالمثل يكون تحويل أحداثيات عمودي

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

في R^3 دوراناً إذا كان

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$$

ودوراناً مصحوباً بانعكاس في أحد مستويات الأحداثيات إذا كان المحدد -1 .

مثال (٦٨) :

تحويل الأحداثيات العمودي

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

يكون دورانا لأن

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1$$

ويكون محورا x' ، y' الموجبان في اتجاه متجهي العمودين

$$u'_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad , \quad u'_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(شكل ٤ - ٢١)

مادة اختيارية :

إثبات نظرية ٢٦ : لتكن Q مصفوفة الانتقال من B' إلى B . ستثبت أن $QP = I$ ، ومن ثم نستنتج أن $Q = P^{-1}$ لكي نكمل الإثبات .

لتكن $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ وافرض أن

$$QP = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[x]_{B'} = P[x]_B \quad \text{من (4.26)}$$

$$[x]_B = Q[x]_{B'}$$

لجميع x من V . بضرب طرفي المعادلة الأعلى من اليسار في Q ثم التعميض من المعادلة الثانية نحصل عل

$$[x]_B = QP[x]_B \quad (4.30)$$

لجميع x من V . وضع $x = u_1$ في (4.30) يعطى

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

أى

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

بالمثل التعميمات المتعاقبة $x = u_2, \dots, u_n$ في (4.30) تعطى

$$\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذا $QP = I$.

تمارين ٤ - ١٠

١ - أوجد مصفوفة أحداثيات ومتجه أحداثيات w بالنسبة إلى الأساس $S = \{u_1, u_2\}$.

$$u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1); w = (3, -7) \quad (أ)$$

$$u_1 = (2, -4), u_2 = (3, 8); w = (1, 1) \quad (ب)$$

$$u_1 = (1, 1), u_2 = (0, 2), w = (a, b) \quad (ج)$$

٢ - أوجد متجه أحداثيات ومصفوفة أحداثيات v بالنسبة إلى الأساس $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

$$v = (2, -1, 3), v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 3, 3) \quad (أ)$$

$$v = (5, -12, 3), v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (-4, 5, 6), v_3 = (7, -8, 9) \quad (ب)$$

٣ - أوجد متجه أحداثيات ومصفوفة أحداثيات p بالنسبة إلى الأساس $S = \{p_1, p_2, p_3\}$.

$$p = 4 - 3x + x^2, p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2 \quad (أ)$$

$$p = 2 - x + x^2, p_1 = 1 + x, p_2 = 1 + x^2, p_3 = x + x^2 \quad (ب)$$

٤ - أوجد متجه أحداثيات ومصفوفة أحداثيات A بالنسبة إلى الأساس $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٥ - في كل جزء أعطى أساس عيار متعامد بالنسبة إلى الضرب الداخلي الأقليدى. استخدم طريقة مثال ٦٢ لإيجاد متجه أحداثيات ومصفوفة أحداثيات w .

$$w = (3, 7); u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (أ)$$

$$w = (-1, 0, 2); u_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), u_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad (ب)$$

- ٦ - (أ) أوجد w إذا كان $(w)_S = (6, -1, 4)$ و S هو الأساس في تمرين ١٢ .
 (ب) أوجد q إذا كان $(q)_S = (3, 0, 4)$ و S هو الأساس في تمرين ٣ أ .
 (ج) أوجد B إذا كان $(B)_S = (-8, 7, 6, 3)$ و S هو الأساس في تمرين ٤ .

٧ - اعتبر R^2 له الضرب الداخلي الأقليدس . واعتبر $S = \{w_1, w_2\}$ أساسا عياريا متعامدا حيث $w_1 = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, $w_2 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ اعتبر u, v المتجهين في R^2 اللذين هما $(u)_S = (1, 1)$ ، $(v)_S = (-1, 4)$.

- (أ) احسب $\|u\|$ ، $d(u, v)$ ، $\langle u, v \rangle$ باستخدام نظرية ٢٥ .
 (ب) أوجد u, v وتأكد من صحة نتائج الجزء (أ) بحساب $\|u\|$ ، $d(u, v)$ ، $\langle u, v \rangle$ مباشرة .

٨ - اعتبر الأساسين $B = \{u_1, u_2\}$ ، $B' = \{v_1, v_2\}$ للفضاء R^2 ، حيث

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

(ب) احسب مصفوفة الأحداثيات $[w]_B$ ، حيث

$$w = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

واستخدم (4.26) لحساب $[w]_{B'}$.

(ج) تأكد من عملك بحساب $[w]_{B'}$ مباشرة .

(د) أوجد مصفوفة الانتقال من B' إلى B .

٩ - كرر ما طلب في تمرين ٨ حيث

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

١٠ - اعتبر الأساسين $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ ، $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ للفضاء R^3 حيث

$$u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

(ب) احسب مصفوفة الأحداثيات $[w]_B$ ، حيث

$$w = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

واستخدم (4.26) لحساب $[w]_{B'}$.

(ج) تأكد من عملك بحساب $[w]_{B'}$ مباشرة .

١١ - كرر ما طلب في تمرين ١٠ حيث

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

١٢ - اعتبر الأساسين $B = \{p_1, p_2\}$ ، $B' = \{q_1, q_2\}$ للفضاء P_1 حيث

$$p_1 = 6 + 3x, p_2 = 10 + 2x, q_1 = 2, q_2 = 3 + 2x$$

(أ) أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

(ب) احسب مصفوفة الأحداثيات $[p]_B$ ، حيث $p = -4 + x$ واستخدم (4.26) لحساب $[p]_{B'}$.

(ج) تأكد من عملك بحساب $[p]_{B'}$ مباشرة .

(د) أوجد مصفوفة الانتقال من B' إلى B .

١٣ - اعتبر V هو الفضاء المنشأ من $f_2 = \cos x$ ، $f_1 = \sin x$.

(أ) أثبت أن $g_2 = 3 \cos x$ ، $g_1 = 2 \sin x + \cos x$ يكونان أساسا للفضاء V .

(ب) أوجد مصفوفة الانتقال من $B = \{f_1, f_2\}$ إلى $B' = \{g_1, g_2\}$.

(ج) احسب مصفوفة الأحداثيات $[h]_B$ حيث $h = 2 \sin x - 5 \cos x$ واستخدم (4.26)

لإيجاد $[h]_{B'}$.

(د) تأكد من عملك بحساب $[h]_{B'}$ مباشرة .

(هـ) أوجد مصفوفة الانتقال من B' إلى B .

١٤ - اعتبر أن نظام الأحداثيات المتعامدة 'لا' x قد حصلنا عليه بدوران نظام الأحداثيات المتعامدة 'لا' y

بزواوية $\theta = 3\pi/4$.

(أ) أوجد الإحداثيين في النظام 'لا' x للنقطة التي إحداثياتها في النظام 'لا' y هما $(-2, 6)$.

(ب) أوجد الأحداثيين في النظام 'لا' y للنقطة التي إحداثياتها في النظام 'لا' x هما $(5, 2)$.

١٥ - كرر تمرين ١٤ بزواوية $\theta = \pi/3$.

١٦ - اعتبر أن نظام الأحداثيات المتعامدة $z'y'$ قد حصلنا عليه بدوران نظام الأحداثيات المتعامدة xy عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور (y) بالنظر إلى أسفل محور (z) بزاوية $\theta = \pi/4$.

(أ) أوجد الأحداثيات في النظام $z'y'$ من xy للنقطة التي أحداثياتها في النظام xy هي $(-1, 2, 5)$.
(ب) أوجد الأحداثيات في النظام xy للنقطة التي أحداثياتها في النظام $z'y'$ هي $(1, 6, -3)$.

١٧ - كرر تمرين ١٦ بدوران زاوية $\theta = \pi/3$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور (y) بالنظر من على محور (z) الموجب في اتجاه نقطة الأصل.

١٨ - كرر تمرين ١٦ بدوران زاوية $\theta = 3\pi/4$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور (x) بالنظر من على محور (y) الموجب في اتجاه نقطة الأصل.

١٩ - استخدم نظرية ٢٨ لتحديد أى مما يلي تكون مصفوفة عمودية.

$$(أ) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (ج) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (و) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (د) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

٢٠ - أوجد المصفوفات العكسية لمصفوفات تمرين ١٩ التي تكون عمودية

٢١ - أثبت أن كلا من المصفوفتين الآتيتين هي مصفوفة عمودية لجميع قيم θ .

$$(أ) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (ب) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢٢ - أوجد المصفوفتين العكسيتين للمصفوفتين في تمرين ٢١

٢٣ - اعتبر تحويل الأحداثيات العمودية

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

أوجد (x', y') للنقط التي إحداثياتها (x, y) كما يلي :

(أ) $(2, -1)$ (ب) $(4, 2)$ (ج) $(-7, -8)$ (د) $(0, 0)$

٢٤ - ارسم بيانيا محوري xy ومحوري $x'y'$ لتحويل الإحداثيات في تمرين ٢٣ .

٢٥ - لأي مايل يكون $x = Px'$ دورانا ؟

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad P = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

٢٦ - ارسم بيانيا محوري xy ومحوري $x'y'$ لتحويلات الإحداثيات في تمرين ٢٥ .

٢٧ - اعتبر تحويل الإحداثيات المموي .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

أوجد (x', y', z') للنقط التي تكون إحداثياتها (x, y, z) كما يلي :

(أ) $(3, 0, -7)$ (ب) $(1, 2, 6)$ (ج) $(-9, -2, -3)$ (د) $(0, 0, 0)$

٢٨ - ارسم بيانيا محاور xyz ومحاور $x'y'z'$ لتحويل الإحداثيات في تمرين ٢٧ .

٢٩ - لأي مايل يكون $x = Px'$ دورانا ؟

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

٣٠ - ارسم بيانيا محاور xyz ومحاور $x'y'z'$ لتحويل الإحداثيات في تمرين ٢٩ .

٣١ - (أ) حصلنا على نظام إحداثيات متعامدة $x'y'z'$ بدوران نظام إحداثيات xyz عكس اتجاه

عقارب الساعة حول محور z بزاوية θ (بالنظر من على محور z الموجب في اتجاه نقطة

الأصل .) أوجد مصفوفة A بحيث يكون

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

حيث (x, y, z) ، (x', y', z') هما إحداثيات نقطة في النظامين xyz ، $x'y'z'$ على الترتيب .

(ب) كرر الجزء (أ) للدوران حول محور x .

٣٢ - حصلنا على نظام إحداثيات متعامدة $x''y''z''$ أولاً بدوران نظام إحداثيات متعامدة xyz زاوية 60° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور z (بالنظر إلى تحت ، من محور z الموجب) للحصول على نظام إحداثيات $x'y'z'$ وبعد ذلك دوران نظام الإحداثيات $x'y'z'$ زاوية 45° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور y' (بالنظر من على اتجاه y' الموجب إلى نقطة الأصل) .
أوجد مصفوفة A بحيث يكون

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

حيث (x, y, z) ، (x'', y'', z'') هما الإحداثيات في النظامين xyz ، $x''y''z''$ لنقطة.

٣٣ - أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة عمودية فإن A' أيضاً تكون عمودية.

٣٤ - أثبت أن أية مصفوفة من النوع $n \times n$ تكون عمودية إذا وفقط إذا كانت صفوفها تكون فئة عيارية متعامدة R^n .

٣٥ - استخدم تمرين ٣٣ ، لإثبات أن أية مصفوفة من النوع $n \times n$ تكون عمودية إذا وفقط إذا كانت أعمدتها تكون فئة عيارية متعامدة R^n .

٣٦ - أثبت أنه إذا كانت P مصفوفة عمودية فإن $\det(P) = 1$ أو $\det(P) = -1$.

٣٧ - أثبت نظرية ٢٥ - أ .

٣٨ - أثبت نظرية ٢٥ - ب .

٣٩ - أثبت نظرية ٢٥ - ج .

٥- التحويلات الخطية

٥ - ١ مقدمة للتحويلات الخطية

في هذا القسم سنبدأ في دراسة الدوال ذات القيم الاتجاهية لمتغير متجه . أى الدوال التي لها الصورة $w = F(v)$ حيث كل من المتغير المستقل v والمتغير التابع w هو متجه . وسوف نركز على فصل خاص من دوال المتجهات وهو ما يسمى بالتحويلات الخطية . ولغزلاء تطبيقات هامة كثيرة في الطبيعة والعلوم الهندسية والعلوم الاجتماعية والأفرع المختلفة من الرياضيات .

إذا كان V, W فضاءين خطيين وكانت F دالة بحيث تلازم متجهاً وحيداً من W بكل متجه من V ، فإننا نقول أن F ترسم V إلى W ونكتب $F : V \rightarrow W$. وعلاوة على هذا إذا كانت F تلازم المتجه w بالمتجه v فنكتب $w = F(v)$ ونقول أن w هي صورة v بتأثير F .

للتوضيح ، إذا كان $v = (x, y)$ متجهاً في R^2 فإن الصيغة

$$F(v) = (x, x + y, x - y) \quad (5.1)$$

تعرف دالة بحيث ترسم R^2 إلى R^3 . وبصفة خاصة إذا كان $v = (1, 1)$ فإن صورة v بتأثير F هي $F(v) = (1, 2, 0)$.

تعريف : إذا كانت $F : V \rightarrow W$ دالة من الفضاء الخطي V إلى الفضاء الخطي W ، فإن F تسمى تحويلاً خطياً إذا كان

$$F(u + v) = F(u) + F(v) \quad (i) \text{ لكل متجهين } u, v \text{ من } V$$

$$F(ku) = kF(u) \quad (ii) \text{ لكل متجه } u \text{ من } V \text{ ولكل عدد قياسي } k$$

للتوضيح اعتبر $F : R^2 \rightarrow R^3$ هي الدالة المعروفة بواسطة (5.1) إذا كان $u = (x_1, y_1)$ ،

$$v = (x_2, y_2) \text{ فإن } u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ ، وإذن}$$

$$\begin{aligned} F(u + v) &= (x_1 + x_2, [x_1 + x_2] + [y_1 + y_2], [x_1 + x_2] - [y_1 + y_2]) \\ &= (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= F(u) + F(v) \end{aligned}$$

أيضاً إذا كان k عدداً قياسياً فإن $ku = (kx_1, ky_1)$ ، وإذن

$$\begin{aligned} F(ku) &= (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\ &= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\ &= kF(u) \end{aligned}$$

لذا تكون F تحويلاً خطياً .

إذا كانت $F : V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً ، فإنه لأي v_1 , v_2 في V ولأي عددين قياسيين k_1 , k_2 ، يكون

$$F(k_1 v_1 + k_2 v_2) = F(k_1 v_1) + F(k_2 v_2) = k_1 F(v_1) + k_2 F(v_2)$$

بالمثل إذا كانت v_1 , v_2 , \dots , v_n متجهات في V وكانت k_1 , k_2 , \dots , k_n أعداداً قياسية ، فإن

$$F(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n) = k_1 F(v_1) + k_2 F(v_2) + \dots + k_n F(v_n) \quad (5.2)$$

سنعطى الآن بعض أمثلة أخرى للتحويلات الخطية .

مثال (١) :

اعتبر A مصفوفة محددة من النوع $m \times n$. إذا استعملنا رموز المصفوفات للمتجهات في R^n ، R^m فيمكننا تعريف دالة $T : R^n \rightarrow R^m$ بواسطة

$$T(x) = Ax$$

لاحظ أنه إذا كانت x مصفوفة من النوع $n \times 1$ فإن حاصل الضرب Ax يكون مصفوفة من النوع $m \times 1$ ، لهذا فإن T ترسم R^n إلى R^m . وعلاوة على هذا T تكون خطية ، لإثبات هذا نفرض أن u , v مصفوفتان من النوع $n \times 1$ وأن k عدداً قياسياً . باستخدام خواص ضرب المصفوفات نحصل على

$$A(ku) = k(Au) \quad \text{و} \quad A(u + v) = Au + Av$$

أو بصيغة مكافئة

$$T(ku) = kT(u) \quad \text{و} \quad T(u + v) = T(u) + T(v)$$

نسعى التحويل الخطي في هذا المثال بالضرب في A . وتسمى التحويلات الخطية من هذا النوع بتحويلات للمصفوفات .

مثال (٢) :

كحالة خاصة من المثال السابق ، اعتبر θ زاوية ثابتة واعتبر $T : R^2 \rightarrow R^2$ ضرباً في المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

إذا كان v هو المتجه

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

فإن

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

هندسياً يكون $T(\mathbf{v})$ هو المتجه الذى ينتج إذا دار \mathbf{v} بزاوية θ لإثبات هذا ، نفرض أن ϕ هى الزاوية بين \mathbf{v} وبين اتجاه محور x الموجب ، وأن

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

هو المتجه الذى ينتج إذا دار \mathbf{v} بزاوية θ (شكل ٥ - ١) . سنثبت أن $\mathbf{v}' = T(\mathbf{v})$. إذا كان r يدل على طول \mathbf{v} فإن

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

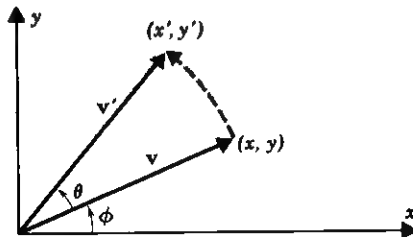
بالمثل حيث أن \mathbf{v}' له نفس الطول مثل \mathbf{v} ، فإن

$$x' = r \cos(\theta + \phi) \quad y' = r \sin(\theta + \phi)$$

إذن

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta + \phi) \\ r \sin(\theta + \phi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= A\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

يسمى التحويل الخطى فى هذا المثال بدوران R^2 بالزاوية θ .



(شكل ٥ - ١)

مثال (٣) :

اعتبر V ، W فضاءين خطيين . فيكون الراسم $T: V \rightarrow W$ بحيث يكون $T(v) = 0$ لكل v من V تحويلًا خطيًا يسمى بالتحويل الصفري . لإثبات أن T خطي ، لاحظ أن

$$T(u + v) = 0, T(u) = 0, T(v) = 0 \quad \text{and} \quad T(ku) = 0$$

وإذن

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \text{and} \quad T(ku) = kT(u)$$

مثال (٤) :

اعتبر V أى فضاء خطي . يسمى الراسم $T: V \rightarrow V$ المعروف بواسطة $T(v) = v$ بالتحويل المحايد على V . نترك تحقيق أن T خطي كتمرين .

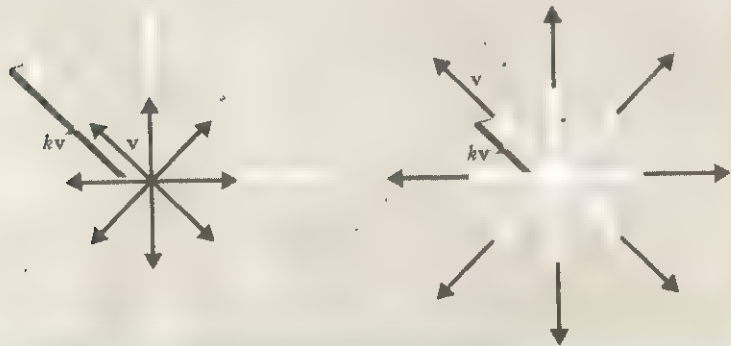
إذا كان ، كما في مثالي ٢ ، ٤ ، $T: V \rightarrow V$ تحويلًا خطيًا من فضاء خطي V إلى نفسه ، فإن T يسمى مؤثرًا خطيًا على V .

مثال (٥) :

اعتبر V أى فضاء خطي و k أى عدد قياسي معين . سنترك كتمرين التأكد من أن الدالة $T: V \rightarrow V$ المعرفة بواسطة

$$T(v) = kv$$

هى مؤثر خطي على V . إذا كان $k > 1$ ، تسمى T بتمديد V ، إذا كان $0 < k < 1$ تسمى T بتقليص V . هندسياً فإن التمديد « يمتد » كل متجه من V بالمعامل k والتقليص « يضغط » كل متجه بالمعامل k (أنظر شكل ٥ - ٢) .



(أ)

(ب)

(ب) تقليص V

(أ) تمديد V

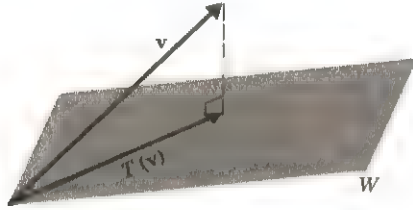
(شكل ٥ - ٢)

مثال (٦) :

اعتبر V أى فضاء ضرب داخلى ، وافرض أن W فضاء جزئياً ذا بعد منتهى من V له

$$S = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$$

كأساس عيارى متعامد . اعتبر $T: V \rightarrow W$ هى الدالة التى ترسم المتجه v من V إلى مسقطه العمودى



(شكل ٣-٥)

على W (قدم ٤ - ٩) ، أى أن

$$T(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_r \rangle w_r$$

(أنظر شكل ٣-٥)

يسمى الراسم T بالإسقاط العمودى للفضاء V على W ، وينتج أنه خطياً من الخواص الأساسية للضرب الداخلى . فمثلاً

$$\begin{aligned} T(u + v) &= \langle u + v, w_1 \rangle w_1 + \langle u + v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle u + v, w_r \rangle w_r \\ &= \langle u, w_1 \rangle w_1 + \langle u, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle u, w_r \rangle w_r \\ &\quad + \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_r \rangle w_r \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

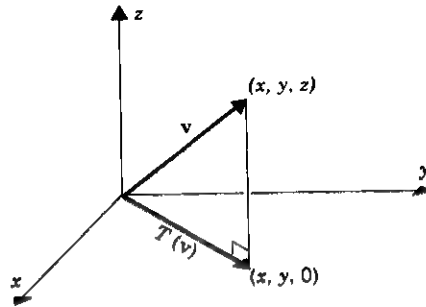
$$\bullet \quad T(ku) = kT(u) \text{ بالمثل}$$

مثال (٧) :

كحالة خاصة من المثال السابق ، اعتبر $V = R^3$ له الضرب الداخلى الإقليدى . يكون المتجهات $w_2 = (0, 1, 0)$ ، $w_1 = (1, 0, 0)$ أساساً عيارياً متعامداً للمستوى xy . فإذا كان $v = (x, y, z)$ أى متجه من R^3 ، فإن المسقط العمودى للمتجه R^3 على المستوى xy يعطى بواسطة

$$\begin{aligned} T(v) &= \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\ &= (x, y, 0) \end{aligned}$$

(أنظر شكل ٤ - ٥)



(شكل ٤ - ٥)

مثال (٨) :

اعتبر فضاء خطياً ذا n بعداً ، وإن $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ أساساً معيناً للفضاء V .
من نظرية ٢٤ في قسم ٤ - ١٠ يمكن كتابته أى متجهين u, v بطريقة وحيدة على الصورة

$$v = d_1 w_1 + d_2 w_2 + \dots + d_n w_n \quad \text{و} \quad u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n$$

ومنها

$$(u)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$(v)_S = (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

ولكن

$$u + v = (c_1 + d_1)w_1 + (c_2 + d_2)w_2 + \dots + (c_n + d_n)w_n$$

$$ku = (kc_1)w_1 + (kc_2)w_2 + \dots + (kc_n)w_n$$

ومنها

$$(u + v)_S = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n)$$

$$(ku)_S = (kc_1, kc_2, \dots, kc_n)$$

وإذن يكون

$$(ku)_S = k(u)_S \quad \text{و} \quad (u + v)_S = (u)_S + (v)_S \quad (5.3)$$

بالمثل لمصفوفات الأحداثيات يكون لدينا

$$[ku]_S = k[u]_S \quad \text{و} \quad [u + v]_S = [u]_S + [v]_S$$

لنفرض أننا اعتبرنا $T: V \rightarrow R^n$ هي الدالة التى ترسم المتجه v من V إلى متجه أحداثياته بالنسبة إلى S ،
أى أن

$$T(v) = (v)_S$$

فيكون بدلالة T ، تنص (3-5) على أن

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

وأيضاً

$$T(ku) = kT(u)$$

لهذا فإن T تحويل خطي من V إلى R^n .

مثال (٩) :

اعتبر V فضاء ضرب داخلي ، واعتبر v_0 أي متجه معين من V . اعتبر $T : V \rightarrow R$ التحويل الذي يرسم أي متجه v إلى حاصل ضربه الداخلي مع v_0 أي أن

$$T(v) = \langle v, v_0 \rangle$$

من خواص الضرب الداخلي

$$T(u + v) = \langle u + v, v_0 \rangle = \langle u, v_0 \rangle + \langle v, v_0 \rangle = T(u) + T(v)$$

وأيضاً

$$T(ku) = \langle ku, v_0 \rangle = k\langle u, v_0 \rangle = kT(u)$$

لهذا فإن T تحويل خطي .

مثال (١٠) :

(للقاء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .)

اعتبر $V = C[0, 1]$ هو الفضاء الخطي لجميع الدوال المتصلة ذات القيمة الحقيقية على الفترة $0 \leq x \leq 1$. واعتبر W هو الفضاء الجزئي من $C[0, 1]$ المكون من جميع الدوال التي مشتقتها الأولى متصلة في الفترة $0 \leq x \leq 1$.

اعتبر $D : W \rightarrow V$ هو التحويل الذي يرسم f إلى مشتقتها ، أي أن

$$D(f) = f'$$

من خواص التفاضل ، يكون لدينا

$$D(f + g) = D(f) + D(g)$$

وأيضاً

$$D(kf) = kD(f)$$

إذن D تحويل خطي .

مثال (١١) :

(للقاء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل)

اعتبر $V = C[0, 1]$ كما في المثال السابق واعتبر $J : V \rightarrow R$ معرفاً بواسطة

$$J(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

فمثلاً إذا كانت $f(x) = x^2$ فإن

$$J(f) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad \text{حيث أن}$$

$$\int_0^1 (f(x) + g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \quad \text{وأيضاً}$$

$$\int_0^1 kf(x) dx = k \int_0^1 f(x) dx$$

لأي ثابت k ، فينتج أن

$$\begin{aligned} J(f + g) &= J(f) + J(g) \\ J(kf) &= kJ(f) \end{aligned}$$

إذن J تحويل خطي .

تمارين ٥ - ١

في التمارين ١ - ٨ أعطى صيغة لدالة $F : R^2 \rightarrow R^2$. حدد في كل تمرين ما إذا كانت F خطية .

$$F(x, y) = (x^2, y) \quad - \quad ٢$$

$$F(x, y) = (2x, y) \quad - \quad ١$$

$$F(x, y) = (0, y) \quad - \quad ٤$$

$$F(x, y) = (y, x) \quad - \quad ٣$$

$$F(x, y) = (2x + y, x - y) \quad - \quad ٦$$

$$F(x, y) = (x, y + 1) \quad - \quad ٥$$

$$F(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y}) \quad - \quad ٨$$

$$F(x, y) = (y, y) \quad - \quad ٧$$

في التمارين ٩ - ١٢ أعطيت صيغة لدالة $F : R^3 \rightarrow R^3$. حدد في كل تمرين ما إذا كانت F خطية .

$$F(x, y, z) = (0, 0) \quad - \quad ١٠$$

$$F(x, y, z) = (x, x + y + z) \quad - \quad ٩$$

$$F(x, y, z) = (2x + y, 3y - 4z) \quad - \quad ١٢$$

$$F(x, y, z) = (1, 1) \quad - \quad ١١$$

في التمارين ١٣ - ١٦ أعطيت صيغة لدالة $F : M_{22} \rightarrow R$. حدد في كل تمرين ما إذا كانت F خطية .

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad - \quad ١٤$$

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d \quad - \quad ١٣$$

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2 \quad - \quad ١٦$$

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + 3b + c - d \quad - \quad ١٥$$

في التمارين ١٧ - ٢٠ أعطيت صيغة لدالة $F: P_2 \rightarrow P_2$. حدد في كل تمرين ما إذا كانت F خطية .

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2 \quad - \quad ١٧$$

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2 \quad - \quad ١٨$$

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0 \quad - \quad ١٩$$

$$F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + a_1x + a_2x^2 \quad - \quad ٢٠$$

٢١ - اعتبر $F: R^2 \rightarrow R^2$ هي الدالة التي ترسم كل نقطة في المستوى إلى انعكاسها حول محور y . أوجد صيغة للدالة F ثم أثبت أن F مؤثر خطي على R^2 .

٢٢ - اعتبر B مصفوفة معينة من النوع 2×3 . أثبت أن الدالة $T: M_{22} \rightarrow M_{23}$ المعرفة بواسطة $T(A) = AB$ هي تحويل خطي .

٢٣ - اعتبر $T: R^3 \rightarrow R^2$ هي تحويل مصفوفات ، وافرض أن

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ and } T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

(أ) أوجد المصفوفة .

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}\right) \quad \text{(ب) أوجد}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) \quad \text{(ج) أوجد}$$

٢٤ - اعتبر $T: R^3 \rightarrow W$ هي مسقط R^3 العمودي على المستوى xz ، W .

(أ) أوجد صيغة للتحويل T .

(ب) أوجد $T(2, 7, -1)$.

٢٥ - اعتبر $T: R^3 \rightarrow W$ هي مسقط R^3 العمودي على المستوى W الذي معادلته

$$x + y + z = 0$$

(أ) أوجد صيغة للتحويل T .

(ب) أوجد $T(3, 8, 4)$.

٢٦ - في كل جزء اعتبر $T: R^2 \rightarrow R^2$ هو المؤثر الخطي الذي يدير كل متجه في المستوى بزاوية θ

أوجد $T(x, y)$ ، $T(-1, 2)$ عندما :

$$\theta = -\frac{\pi}{3} \quad \text{(د)} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{(ج)} \quad \theta = \pi \quad \text{(ب)} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{(أ)}$$

٢٧ - أثبت أنه إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويل خطي فإن $T(u - v) = T(u) - T(v)$ لجميع المتجهات u, v من V .

٢٨ - اعتبر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً للفضاء الخطي V واعتبر $T: V \rightarrow W$ تحويل خطي. أثبت أنه إذا كان $T(v_1) = T(v_2) = \dots = T(v_n) = 0$ فإن T هو التحويل الصفري.

٢٩ - اعتبر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً للفضاء الخطي V واعتبر $T: V \rightarrow V$ مؤثر خطي. أثبت أنه إذا كان $T(v_1) = v_1, T(v_2) = v_2, \dots, T(v_n) = v_n$ فإن T هو التحويل المحايد.

٣٠ - اعتبر S أساساً للفضاء الخطي ذي n بعداً. أثبت أنه إذا كانت v_1, v_2, \dots, v_r تكون فئة مستقلة خطياً من المتجهات في V فإن متجهات الأحداثيات $(v_1)_S, (v_2)_S, \dots, (v_r)_S$ تكون فئة مستقلة خطياً في R^n والعكس بالعكس.

٣١ - باستخدام رموز تمرين ٣٠ أثبت أنه إذا كانت v_1, v_2, \dots, v_r تنشئ V فإن متجهات الأحداثيات $(v_1)_S, (v_2)_S, \dots, (v_r)_S$ تنشئ R^n والعكس بالعكس.

٣٢ - أوجد أساساً للفضاء P_2 الجزئي الناشئ من المتجهات المعطاة

$$(أ) \quad -1 + x - 2x^2, \quad 3 + 3x + 6x^2, \quad 9$$

$$(ب) \quad 1 + x, \quad x^2, \quad -2 + 2x^2, \quad -3x$$

$$(ج) \quad 1 + x - 3x^2, \quad 2 + 2x - 6x^2, \quad 3 + 3x - 9x^2$$

(أرشاد: اعتبر S هو الأساس المعتاد للفضاء P_2 واستخدم متجهات الأحداثيات بالنسبة إلى S ، لاحظ تمرين ٣٠، ٣١).

٥ - ٢ خواص التحويلات الخطية : القوة والمدى

في هذا القسم ستطور بعض الخواص الأساسية للتحويلات الخطية. وبصفة خاصة سنثبت أنه متى عرفنا صور متجهات الأساس بتأثير تحويل خطي. فيصبح ممكناً إيجاد صور بقية المتجهات في الفضاء.

لظرية ١ : إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويل خطياً، فإن :

$$(أ) \quad T(0) = 0$$

$$(ب) \quad T(-v) = -T(v) \text{ لكل } v \text{ من } V.$$

$$(ج) \quad T(v - w) = T(v) - T(w) \text{ لكل } v, w \text{ من } V.$$

الإثبات : اعتبر v أى متجه من V . حيث أن $0v = 0$ ، فيكون

$$T(0) = T(0v) = 0T(v) = 0$$

وهو ما يثبت (أ)

أيضاً $T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v)$. وهو ما يثبت (ب)

$$\begin{aligned} \text{وأخيرا } v - w &= v + (-1)w \\ T(v - w) &= T(v + (-1)w) \\ &= T(v) + (-1)T(w) \\ &= T(v) - T(w) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

تعريف : إذا كان $T : V \rightarrow W$ تحويلا خطيا فإن فئة متجهات V التي ترسبها T إلى 0 تسمى بالنواة (أو بالفضاء الصفري) للتحويل T ، ويرمز لها بواسطة $\ker(T)$. فئة جميع المتجهات من W التي تكون صوراً بتأثير T لمتجه واحد على الأقل من V تسمى بالمدى للتحويل T ، ويرمز لها بواسطة $R(T)$.

مثال (١٢) :

اعتبر $T : V \rightarrow W$ هو التحويل الصفري. حيث أن T ترسم كل متجه إلى 0 ، فإن $\ker(T) = V$. حيث أن 0 هو الصورة الوحيدة الممكنة بتأثير T فإن $R(T)$ تتكون من المتجه الصفري فقط .

مثال (١٣) :

اعتبر $T : R^n \rightarrow R^m$ هو الضرب في

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

النواة للتحويل T تتكون من جميع

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

التي تكون متجهات حل للنظام المتجانس

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويتكون مدى T من المتجهات

$$b = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

بحيث يكون النظام

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

متوافق .

نظرية ٢ : إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلًا خطيًا فإن :

(أ) نواة T هي فضاء جزئي من V .

(ب) مدى T هو فضاء جزئي من W .

الإثبات :

(أ) لإثبات أن $\ker(T)$ هو فضاء جزئي ، يجب أن نثبت أنه مغلق بالنسبة للجمع والضرب في أعداد قياسية . اعتبر v_1, v_2 متجهين في $\ker(T)$ واعتبر k أي عدد قياسي . فيكون

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

إذن $v_1 + v_2$ في $\ker(T)$. أيضاً

$$T(kv_1) = kT(v_1) = k0 = 0$$

إذن kv_1 في $\ker(T)$.

(ب) اعتبر w_1, w_2 متجهين في مدى T . لإثبات هذا الجزء يجب أن نثبت أن $kw_1, w_1 + w_2$ في مدى T لأي عدد قياسي k ، أي أننا يجب أن نجد متجهين a, b من V بحيث يكون

$$T(b) = kw_1, T(a) = w_1 + w_2$$

حيث أن w_1, w_2 في مدى T فيوجد متجهان a_1, a_2 من V بحيث يكون

$$T(a_1) = w_1, T(a_2) = w_2 .$$

$$T(a) = T(a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2) = w_1 + w_2$$

وأيضاً

$$T(b) = T(ka_1) = kT(a_1) = kw_1$$

وهذا ما يكمل الإثبات .

مثال (١٤) :

اعتبر $T: R^n \rightarrow R^m$ هو الضرب في مصفوفة A من النوع $m \times n$. من مثال ١٣ فتكون نواة T من جميع حلول $Ax = 0$ ، إذ النواة هي فضاء الحلول لهذا النظام . أيضاً من مثال ١٣ يتكون مدى T من جميع المتجهات b بحيث يكون النظام $Ax = b$ متوافقاً . إذا من نظرية ١٤ في قسم ٤ - ٦ ، يكون مدى T هو فضاء الأعمدة للمصفوفة A .

اعتبر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً للفضاء الخطي V وأن $T: V \rightarrow W$ تحويل خطي . إذا حدث وعلمنا صور متجهات الأساس ، أي

$$T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$$

فيمكننا الحصول على الصورة $T(v)$ لأي متجه v ، أولا بكتابة v بدلالة الأساس ، مثلا

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

ثم استخدام العلاقة (5.2) من قسم ٥ - ١ لكتابة

$$T(v) = k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2) + \dots + k_n T(v_n)$$

وباختصار فإن التحويل الخطي يحدد تماما « بقيمه » عند أساس .

مثال (١٥) :

اعتبر الأساس $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ للفضاء R^3 حيث $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$ واعتبر أن $T: R^3 \rightarrow R^2$ هو تحويل خطي ، بحيث يكون

$$T(v_1) = (1, 0) \quad T(v_2) = (2, -1) \quad T(v_3) = (4, 3)$$

أوجد $T(2, -3, 5)$.

الحل: أولا نكتب $v = (2, -3, 5)$ كتركيب خطية من $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$

$$(2, -3, 5) = k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 1, 0) + k_3(1, 0, 0) \quad \text{فيكون}$$

أو عند مساواة المركبات المناظرة

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 2 \\ k_1 + k_2 &= -3 \\ k_1 &= 5 \end{aligned}$$

وهذا يعطى $k_1 = 5$ ، $k_2 = -8$ ، $k_3 = 5$. لهذا

$$(2, -3, 5) = 5v_1 - 8v_2 + 5v_3$$

إذا

$$\begin{aligned} T(2, -3, 5) &= 5T(v_1) - 8T(v_2) + 5T(v_3) \\ &= 5(1, 0) - 8(2, -1) + 5(4, 3) \\ &= (9, 23) \end{aligned}$$

تعريف : إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويل خطي فإن بمدى T يسمى رتبة T وبعد النواة يسمى صفرية T .

مثال (١٦) :

اعتبر $T: R^2 \rightarrow R^2$ دوران الفضاء R^2 بزاوية $\pi/4$. من الواضح هنفسيا أن مدى T هو كل R^2 ، وأن نواة T هي $\{0\}$. لهذا فإن رتبة $T = 2$ ، وصفرية $T = 0$.

مثال (١٧) :

اعتبر $T: R^n \rightarrow R^m$ ضرباً في مصفوفة A من النوع $m \times n$. في مثال ١٤ رأينا أن مدى T هو فضاء أعمدة A . لهذا فإن رتبة T هي بعد فضاء أعمدة A وهو بالضبط رتبة A . باختصار فإن

$$\text{رتبة } (T) = \text{رتبة } (A)$$

أيضاً في مثال ١٤ ، رأينا أن نواة T هي فضاء الحل للنظام $Ax = 0$. لهذا فإن صفرية T هي البعد لفضاء الحل هذا.

تعطى النظرية التالية علاقة بين الرتبة والصفرية لتحويل خطي معرف على فضاء اتجاهي ذي بعد منتهى .
سنرجى* الإثبات إلى نهاية هذا القسم .

نظرية ٣ : (نظرية الأبعاد) : إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً من فضاء اتجاهي V من بعد n إلى فضاء اتجاهي W فإن

$$n = (\text{رتبة } T) + (\text{صفرية } T)$$

في الحالة الخاصة عندما $W = R^m, V = R^n$ و $T: R^n \rightarrow R^m$ ضرب في مصفوفة A من النوع $m \times n$.
فإن نظرية الأبعاد تعطى النتيجة التالية :

$$= (\text{رتبة } T) - (\text{عدد أعمدة } A)$$

$$(5.4) \quad n - (\text{رتبة } T) = (\text{صفرية } T)$$

ولكن ذكرنا في مثال ١٧ أن صفرية T هي البعد لفضاء الحل للنظام $Ax = 0$ ، وأن رتبة T هي رتبة المصفوفة A . لهذا تعطى (5.4) النظرية التالية .

نظرية ٤ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ ، فإن بعد فضاء الحل للنظام $Ax = 0$ هو
رتبة $n - (A)$

مثال (١٨) :

في مثال ٣٥ بقسم ٤ - ه أثبتنا أن النظام المتجانس

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

له فضاء حل ثنائي البعد ، يحل النظام وييجاد أساس له .

حيث أن مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

لها خمسة أعمدة ، فينتج من نظرية ٤ أن رتبة A يجب أن تحقق
رتبة $2 = 5 - (A)$

ومنها رتبة $(A) = 3$. يمكن القارئ أن يتأكد من هذه النتيجة باختزال A إلى الصورة الصفية المميزة وإثبات أن المصفوفة الناتجة لها ثلاثة صفوف غير صفرية .

مادة اختيارية :

إثبات نظرية ٣ : يجب أن نثبت أن

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = n$$

سنعطى الإثبات للحالة عندما $1 \leq \dim(\ker(T)) < n$ ونترك الحالتين $\dim(\ker(T)) = n$ و $\dim(\ker(T)) = 0$ كتمرينين. افرض $\dim(\ker(T)) = r$ واعتبر v_1, v_2, \dots, v_r أساساً للنواة . حيث أن $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ مستقلة خطياً فإن الجزء (ج) من نظرية ٩ في الباب الرابع ينص على وجود $n - r$ متجهاً v_{r+1}, \dots, v_n بحيث يكون $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ أساساً للفضاء V لإكمال الإثبات سنثبت أن المتجهات $n - r$ في الفئة $S = \{T(v_{r+1}), \dots, T(v_n)\}$ تكون أساساً لمدى T . ومن ثم ينتج أن

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = (n - r) + r = n$$

سنثبت أولاً أن S تنشئ مدى T . إذا كان b أى متجه فى مدى T ، فإن $b = T(v)$ لمتجه ما v من V . حيث أن $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ أساس للفضاء V فإن v يمكن كتابتها على الصورة

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_r v_r + c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n$$

حيث أن v_1, \dots, v_r تقع فى نواة T فإن $T(v_1) = \dots = T(v_r) = 0$ وإذن

$$b = T(v) = c_{r+1} T(v_{r+1}) + \dots + c_n T(v_n)$$

لذا فإن S تنشئ مدى T .

أخيراً نثبت أن S فئة مستقلة خطياً ومن ثم تكون أساساً لمدى T . افرض أن تركيبة خطية ما من المتجهات فى S تكون المتجه الصفري ، أى أن

$$k_{r+1} T(v_{r+1}) + \dots + k_n T(v_n) = 0 \quad (5.5)$$

يجب أن نثبت أن $k_{r+1} = \dots = k_n = 0$. حيث أن T خطى فإن (5.5) يمكن إعادة كتابتها على الصورة .

$$T(k_{r+1} v_{r+1} + \dots + k_n v_n) = 0$$

التي تنص على أن $k_{r+1} v_{r+1} + \dots + k_n v_n$ فى نواة T . لهذا يمكن كتابة هذا المتجه كتركيبة خطية من متجهات الأساس $\{v_1, \dots, v_r\}$ مثلاً ،

$$k_{r+1} v_{r+1} + \dots + k_n v_n = k_1 v_1 + \dots + k_r v_r$$

وإذن

$$k_1 v_1 + \dots + k_r v_r - k_{r+1} v_{r+1} - \dots - k_n v_n = 0$$

حيث أن $\{v_1, \dots, v_n\}$ متجهات مستقلة خطياً فإن جميع الأعداد k هي الصفر وبصفة خاصة $k_{r+1} = \dots = k_r = 0$ ، وهو ما يكمل الإثبات .

تمارين ٥ - ٢

١ - اعتبر $T: R^2 \rightarrow R^2$ ضرباً في

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

أي مما يلي في $R(T)$ ؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ (أ) } \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ (ج) }$$

٢ - اعتبر $T: R^2 \rightarrow R^2$ هو التحويل الخطي في تمرين ١ . أي مما يلي في $\ker(T)$ ؟

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ (أ) } \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (ج) }$$

٣ - اعتبر $T: R^4 \rightarrow R^3$ ضرباً في

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

أي مما يلي في $R(T)$ ؟

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ (أ) } \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (ج) }$$

٤ - اعتبر $T: R^4 \rightarrow R^3$ هو التحويل الخطي في تمرين ٣ . أي مما يلي في $\ker(T)$ ؟

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (أ) } \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (ج) }$$

٥ - اعتبر $T: P_2 \rightarrow P_3$ هو التحويل الخطي المعروف بواسطة $T(p(x)) = x p(x)$. أي مما يلي

في $\ker(T)$ ؟

$$x^2 \text{ (أ) } \quad 0 \text{ (ب) } \quad 1 + x \text{ (ج) }$$

٦ - اعتبر $T: P_2 \rightarrow P_3$ هو التحويل الخطي في تمرين ٥ . أى مما يلي في $R(T)$ ؟
 (أ) $x + x^2$ (ب) $1 + x$ (ج) $3 - x^2$

٧ - اعتبر V أى فضاء خطي واعتبر أن $T: V \rightarrow V$ معرف بواسطة $T(v) = 3v$.
 (أ) ما هي نواة T ؟
 (ب) ما هو مدى T ؟

٨ - أوجد الرتبة والصفرية للتحويل الخطي في تمرين ١ .

٩ - أوجد الرتبة والصفرية للتحويل الخطي في تمرين ٥ .

١٠ - اعتبر V فضاء خطيا ذو بعد n . أوجد الرتبة والصفرية للتحويل الخطي $T: V \rightarrow V$ المعرف بواسطة
 (أ) $T(x) = x$ (ب) $T(x) = 0$ (ج) $T(x) = 3x$

١١ - اعتبر الأساس $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ للفضاء R^3 حيث $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 5, 3)$, $v_3 = (1, 0, 10)$.
 أوجد صيغة للتحويل الخطي $T: R^3 \rightarrow R^2$ الذى يحقق ، $T(v_1) = (1, 0)$ ، $T(v_2) = (1, 0)$ ، $T(v_3) = (0, 1)$. احسب $T(1, 1, 1)$.

١٢ - أوجد التحويل الخطي $T: P_2 \rightarrow P_2$ الذى يحقق $T(1) = 1 + x$, $T(x) = 3 - x^2$, $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$. احسب $T(2 - 2x + 3x^2)$.

١٣ - فى كل جزء استخدم المعلومات المعطاة لإيجاد صفرية T .

(أ) $T: R^5 \rightarrow R^7$ ورتبته 3 .

(ب) $T: P_4 \rightarrow P_3$ ورتبته 1 .

(ج) مدى $T: R^6 \rightarrow R^3$ هو R^3 .

(د) $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$ ورتبته 3 .

١٤ - اعتبر A مصفوفة 7×6 بحيث يكون النظام $Ax = 0$ له فقط الحل التافه . واعتبر $T: R^6 \rightarrow R^7$ ضربا فى A . أوجد رتبة وصفرية T .

١٥ - اعتبر A مصفوفة من النوع 5×7 ورتبتها 4 .

(أ) ما هو بعد فضاء الحل للنظام $Ax = 0$ ؟

(ب) هل النظام $Ax = b$ متوافق لجميع المتجهات b من R^5 ؟ اشرح .

فى التمارين ١٦ - ١٩ اعتبر T ضربا فى المصفوفة المعطاة . أوجد :

(أ) أساس لمدى T . (ب) أساس لنواة T . (ج) رتبة وصفرية T .

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - ١٧$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} - ١٦$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix} = 19 . \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 18$$

٢٠ - اعتبر $T: R^3 \rightarrow V$ تحويلا خطيا من R^3 إلى أى فضاء خطى . أثبت أن نواة T هى إما مستقيم مار بنقطة الأصل ، أو مستوى مار بنقطة الأصل ، أو نقطة الأصل فقط ، أو R^3 بأكمله .

٢١ - اعتبر $T: V \rightarrow R^3$ تحويلا خطيا من أى فضاء خطى إلى R^3 . أثبت أن مدى T هو إما مستقيم مار بنقطة الأصل ، أو مستوى مار بنقطة الأصل أو نقطة الأصل ، فقط أو R^3 بأكمله .

٢٢ - اعتبر $T: R^3 \leftarrow R^3$ ضربا فى

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(أ) أثبت أن نواة T هى خط مستقيم مار بنقطة الأصل وأوجد المعادلات البارامترية له .

(ب) أثبت أن مدى T هو مستوى مار بنقطة الأصل وأوجد معادلة له .

٢٣ - أثبت : إذا كان $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساسا للفضاء V وكانت w_1, w_2, \dots, w_n متجهات فى W ، ليست بالضرورة مختلفة ، فيوجد تحويل خطى $T: V \rightarrow W$ بحيث يكون $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \dots, T(v_n) = w_n$

٢٤ - أثبت نظرية الأبعاد فى الحالتين :

(أ) $\dim(\ker(T)) = 0$.

(ب) $\dim(\ker(T)) = n$.

٢٥ - اعتبر $T: V \rightarrow V$ مؤثرا خطيا على فضاء خطى V ذى بعد منتهى . أثبت أن $R(T) = V$ إذا وفقط إذا كان $\ker(T) = \{0\}$.

٢٦ - (للقرء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) . اعتبر $D: P_3 \rightarrow P_2$ هو التحويل بالتفاضل $D(p) = p'$. صف نواة D .

٢٧ - (للقرء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) . اعتبر $J: P_1 \rightarrow R$ هو التحويل بالتكامل $J(p) = \int_{-1}^1 p(x) dx$. صف نواة J .

٥ - ٣ مصفوفات التحويلات الخطية

سنبين فى هذا القسم أن أى تحويل خطى على فضاء خطى ذى بعد منتهى يمكن أن ينظر إليه كتحويل مصفوفات . وسيكفينا ما فعله هنا من الاستفادة بمعلوماتنا عن تحويلات المصفوفات لدراسة تحويلات خطية أخرى أعم .

سنثبت أولا أن كل تحويل خطي من R^n إلى R^m هو تحويل مصفوفات وبدقة أكثر سنثبت أنه إذا كان $T: R^n \rightarrow R^m$ أى تحويل خطي فيمكننا إيجاد مصفوفة A من النوع $m \times n$ بحيث تكون T ضربا في A . لإثبات هذا ، اعتبر

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

هو الأساس المتداد للفضاء R^n ، واعتبر A هي المصفوفة من النوع $m \times n$ الى لها

$$T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$$

كجهات أعمدة (سنفترض في هذا القسم أن جميع المتجهات قد عبر عنها على صورة مصفوفات) فمثلا إذا كان $T: R^2 \rightarrow R^2$ معطى بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \qquad \uparrow$
 $T(e_1) \quad T(e_2)$

وبصورة أعم ، إذا كان

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(e_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \cdots \qquad \uparrow$
 $T(e_1) \quad T(e_2) \quad \cdots \quad T(e_n)$

سنثبت أن التحويل الخطي $T: R^n \rightarrow R^m$ هو ضرب في A . لإثبات هذا لاحظ أولا أن

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

لذا من كون T خطيا

$$T(\mathbf{x}) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n T(\mathbf{e}_n) \quad (5.7)$$

ومن الناحية الأخرى

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n T(\mathbf{e}_n) \quad (5.8) \end{aligned}$$

مقارنة (5.7)، (5.8) تعطى أن $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ أي أن T هو ضرب في A .

نشير إلى المصفوفة A في (5.6) بالمصفوفة المعتادة للتحويل T .

مثال (١٩) :

أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل $T: R^3 \rightarrow R^4$ المعرفة بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T(\mathbf{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام $T(\mathbf{e}_3)$ ، $T(\mathbf{e}_2)$ ، $T(\mathbf{e}_1)$ كتجهات أعمدة، نحصل على

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

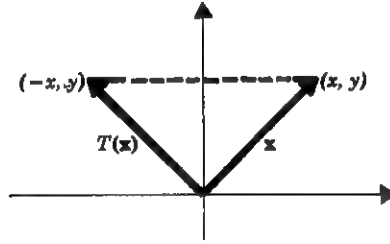
كاختيار ، لاحظ أن

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

وهو ما يتفق مع الصيغة المعطاة للتحويل T .

مسألة (٧٠) :

اعتبر $T: R^2 \rightarrow R^2$ هو التحويل الخطي الذي يرسم كل متجه إلى صورته المتماثلة بالنسبة إلى محور y (شكل ه - ه). أوجد المصفوفة المتعادلة للتحويل T .



(شكل ه - ه)

الحل :

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

باستخدام $T(e_1)$ ، $T(e_2)$ كمتجهات أعمدة نحصل على المصفوفة المتعادلة

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وكاختيار ، اعتبر

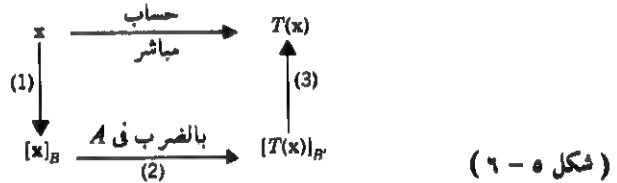
$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

هو أي متجه في R^2 ، فيكون

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

وإذن Ax هو صورة x المتماثلة بالنسبة إلى محور y .

سنثبت بعد ذلك أنه إذا كان W, V أى فضاءين خطيين لهما بعدان منتهيان (ليس بالضرورة R^m, R^n) فبقليل من الفطنة يمكن النظر إلى أى تحويل خطى $T: V \rightarrow W$ على أنه تحويل مصفوفات . الفكرة الأساسية هى اختيار أساسين للفضاءين V, W ثم التعامل مع مصفوفات الإحداثيات بالنسبة إلى هذين الأساسين بدلا من المتجهات نفسها . وبالتحديد أكثر ، افرض أن V من بعد n وأن W من بعد m . إذا اخترنا الأساسين B, B' للفضاءين V, W على الترتيب فتكون مصفوفة الأحداثيات $[x]_B$ لأى متجه x من V متجهها B فى R^n ومصفوفة الأحداثيات $[T(x)]_{B'}$ ستكون متجهها ما فى R^m . لذا فى عملية رسم x إلى $T(x)$ فإن التحويل الخطى T « ينثى » رأسا من R^n إلى R^m بارسال $[x]_B$ إلى $[T(x)]_{B'}$. يمكن إثبات أن هذا الراسم المنشأ يكون دائما تحويلا خطيا وعليه يمكن إنجاز



باستخدام المصفوفة المتعادلة A لهذا التحويل ، أى أن

$$A[x]_B = [T(x)]_{B'} \quad (5.9)$$

إذا استطعنا بطريقة ما إيجاد المصفوفة A فيمكن ، كما هو مبين فى شكل ٥ - ٦ ، حساب $T(x)$ فى ثلاث خطوات بالعملية التالية غير المباشرة :

(١) احسب مصفوفة الأحداثيات $[x]_B$

(٢) اضرب $[x]_B$ من اليسار فى A للحصول على $[T(x)]_{B'}$

(٣) كون $T(x)$ من مصفوفة أحداثياته $[T(x)]_{B'}$

يوجد سببان أساسيان لأهمية هذه العملية غير المباشرة . أولا فهى تمدنا بطريقة ذات كفاءة لإجراء التحويلات الخطية على الحاسبات العددية . والسبب الثانى نظرى ولكن له نتائج تطبيقية هامة . تعتمد المصفوفة A على الأساسين B, B' . عادة أن الشخص يجب أن يختار B, B' ليجعل حساب مصفوفات الأحداثيات سهلا قدر الإمكان ، مثلا بالإكثار من العناصر الصفرية . عند إتمام هذا بالطريقة الصحيحة فيمكن للمصفوفة A أن تقدم معلومات هامة عن التحويل الخطى وستتابع هذه الفكرة فى أقسام آتية .

نعود الآن إلى مسألة إيجاد مصفوفة A تحقق (5.9). افرض أن V فضاء من بعد n وله الأساس

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad \text{وأن } W \text{ فضاء من بعد } m \text{ وله الأساس } B' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} .$$

نبحث عن مصفوفة من النوع $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

بحيث نتحقق (5.9) لجميع المتجهات \mathbf{x} من V . وبصفة خاصة عندما يكون \mathbf{x} هو متجه أساس \mathbf{u}_1 فنريد

$$A[\mathbf{u}_1]_B = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \quad (5.10)$$

ولكن

$$[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

لهذا

$$A[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

وإذن (5.10) نحتم أن

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}$$

أى أن العمود الأول من A هو مصفوفة الأحداثيات للمتجه $T(\mathbf{u}_1)$ بالنسبة إلى الأساس B' . بالمثل إذا اعتبرنا $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$ في (5.9) نحصل على

$$A[\mathbf{u}_2]_B = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}$$

ولكن

$$[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

لهذا

$$A[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

وإذن

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(u_2)]_{B'}$$

أى أن العمود الثانى من A هو مصفوفة الأحداثيات للمتجه $T(u_2)$ بالنسبة إلى الأساس B' . بالاستمرار على هذا المنوال سنجد أن العمود j من A هو مصفوفة الأحداثيات للمتجه $T(u_j)$ بالنسبة إلى B' . المصفوفة الوحيدة A التى حصلنا عليها بهذه الطريقة تسمى بمصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين B, B' . شكليا يمكننا أن نرمز هذه المصفوفة بواسطة

$$A = \begin{matrix} \text{مصفوفة } T \\ \text{بالنسبة إلى الأساسين} \\ B', B \end{matrix} = [[T(u_1)]_{B'} \mid [T(u_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(u_n)]_{B'}]$$

مثال (٢١) :

اعتبر $T: P_1 \rightarrow P_2$ هو التحويل الخطى المعرف بواسطة

$$T(p(x)) = xp(x)$$

أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين

$$B = \{u_1, u_2\} \quad \text{and} \quad B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$$

حيث

$$u_1 = 1, \quad u_2 = x; \quad u'_1 = 1, \quad u'_2 = x, \quad u'_3 = x^2$$

الحل : من صيغة T نحصل على

$$T(u_1) = T(1) = (x)(1) = x$$

$$T(u_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

بالنظر يمكننا تحديد مصفوفات إحداثيات $T(u_1)$ ، $T(u_2)$ بالنسبة إلى B' . وهما

$$[T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذا مصفوفة T بالنسبة إلى B, B' هى

$$A = [[T(u_1)]_{B'} \mid [T(u_2)]_{B'}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٢٢) :

اعتبر $T: P_1 \rightarrow P_2$ ، B, B' كما فى مثال (٢١) واعتبر أن

$$x = 1 - 2x$$

استخدم المصفوفة التى حصلنا عليها فى مثال (٢١) لحساب $T(x)$ بالطريقة غير المباشرة فى شكل $6-5$.

الحل : بالنظر فإن مصفوفة الأحداثيات للمتجه x بالنسبة إلى B هي

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$[T(x)]_{B'} = A[x]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ومنها

$$T(x) = 0u'_1 + 1u'_2 - 2u'_3 = 0(1) + 1(x) - 2(x^2) \\ = x - 2x^2$$

والتأكد لاحظ أن الحساب المباشر للمتجه $T(x)$ هو

$$T(x) = T(1 - 2x) = x(1 - 2x) = x - 2x^2$$

وهو ما يتفق مع النتيجة التي حصلنا عليها بالطريقة غير المباشرة .

مثال (٢٣) :

إذا كان $T: R^n \rightarrow R^m$ تحويل خطياً و كان B, B' هما الأساسان المعتادان للفضائين R^n, R^m بالترتيب فإن مصفوفة T بالنسبة إلى B, B' هي بالضبط المصفوفة المعتادة للتحويل T ، التي نوقشت في بداية هذا القسم . (نترك التحقق من هذا كتمرين) .

في الحالة الخاصة عندما $V=W$ (لهذا يكون $T: V \rightarrow V$ مؤثراً خطياً) فن المعتاد أن نأخذ $B=B'$ عند تكوين مصفوفة المؤثر T . وتسمى المصفوفة الناتجة بمصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B .

مثال (٢٤) :

إذا كان $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ هو أى أساس لفضاء خطي V منتهى البعد و كان $I: V \rightarrow V$ هو المؤثر المحايد على V فإن $I(u_1) = u_1, I(u_2) = u_2, \dots, I(u_n) = u_n$

هكذا

$$[I(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [I(u_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, [I(u_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن مصفوفة المؤثر المحايد بالنسبة إلى أى أساس هى مصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$.

مثال (٢٥) :

اعتبر $T: R^2 \rightarrow R^2$ هو المؤثر الخطى المعرف بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B = \{u_1, u_2\}$ حيث

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الحل : من تعريف T

$$T(u_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2u_1 \quad \text{و} \quad T(u_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3u_2$$

إذا

$$[T(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [T(u_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن مصفوفة T بالنسبة إلى B هى

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

تمارين ٥ - ٣

١ - أوجد المصفوفة المعتادة لكل من المؤثرات الخطية التالية :

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

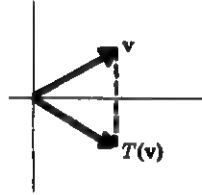
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 7x_2 \\ -8x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

٢ - أوجد المصفوفة المتعادلة لكل من التحويلات الخطية التالية :

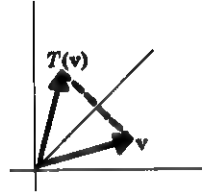
$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

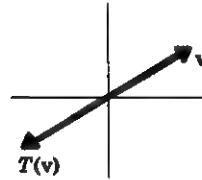
٣ - أوجد المصفوفة المتعادلة للمؤثر الخطي $T : R^2 \rightarrow R^2$ والذي يرسم أى متجه $v = (x, y)$ إلى :



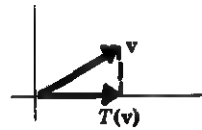
(أ) انعكاسه بواسطة محور x



(ب) انعكاسه بواسطة المستقيم $y = x$



(ج) انعكاسه بواسطة نقطة الأصل



(د) مسقطه العمودى على محور x

٤ - فى كل جزء من تمرين (٣) استخدم المصفوفة التى حصلت عليها لحساب $T(2, 1)$. تأكد من حلولك هندسياً بتخطيط المتجهين $(2, 1)$ ، $T(2, 1)$.

٥ - أوجد المصفوفة المتعادلة للمؤثر الخطي $T : R^3 \rightarrow R^3$ الذى يرسم المتجه $v = (x, y, z)$ إلى :

(أ) انعكاسه بواسطة مستوى xy .

(ب) انعكاسه بواسطة مستوى xz .

(ج) انعكاسه بواسطة مستوى yz .

٦ - في كل جزء من تمرين (٥) ، استخدم المصفوفة التي حصلت عليها لحساب $T(1, 1, 1)$.
تأكد من حلولك هندسياً بتخطيط المتجهين $(1, 1, 1)$ ، $T(1, 1, 1)$.

٧ - أوجد المصفوفة المتعادلة للمؤثر الخطي $T: R^3 \rightarrow R^3$ الذي :

(أ) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور z (بالنظر إلى أسفل محور z الموجب في اتجاه نقطة الأصل) .

(ب) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور x (بالنظر من على محور x الموجب في اتجاه نقطة الأصل) .

(ج) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور y (بالنظر من على محور y الموجب في اتجاه نقطة الأصل) .

٨ - اعتبر $T: P_2 \rightarrow P_1$ هو التحويل الخطي المعروف بواسطة

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين المتنادين للفضاءين P_1 ، P_2 .

٩ - اعتبر $T: R^2 \rightarrow R^3$ معرفة بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين $B = \{u_1, u_2\}$ ، $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ ، حيث

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ب) استخدم المصفوفة التي حصلت عليها في (أ) لحساب

$$T\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

١٠ - اعتبر $T: R^3 \rightarrow R^3$ مؤثراً معرفة بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ، حيث

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ب) استخدم المصفوفة التي حصلت عليها في (أ) لحساب

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

١١ - اعتبر $T: P_2 \rightarrow P_4$ هو التحويل الخطي المعرف بواسطة $T(p(x)) = x^2 p(x)$
 (أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ ، B' ، حيث
 $p_1 = 1 + x^2$ ، $p_2 = 1 + 2x + 3x^2$ ، $p_3 = 4 + 5x + x^2$ هو الأساس المعتاد للفضاء P_4 .
 (ب) استخدم المصفوفة التي حصلت عليها في (أ) لحساب $T(-3 + 5x - 2x^2)$.

١٢ - اعتبر $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ واعتبر أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة المؤثر $T: R^2 \rightarrow R^2$ بالنسبة إلى الأساس $B = \{v_1, v_2\}$.
 (أ) أوجد $[T(v_1)]_B$ ، $[T(v_2)]_B$.
 (ب) أوجد $T(v_1)$ ، $T(v_2)$.

(ج) أوجد $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

١٣ - اعتبر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة التحويل $T: R^4 \rightarrow R^3$ بالنسبة إلى

الأساسين $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ، $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ ، حيث

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد $[T(v_1)]_{B'}$ ، $[T(v_2)]_{B'}$ ، $[T(v_3)]_{B'}$ و $[T(v_4)]_{B'}$

(ب) أوجد $T(v_1)$ ، $T(v_2)$ ، $T(v_3)$ و $T(v_4)$

(ج) أوجد $T\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

١٤ - اعتبر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المؤثر $T: P_2 \rightarrow P_2$ بالنسبة إلى الأساس

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ حيث $v_1 = 3x + 3x^2$ ، $v_2 = -1 + 3x + 2x^2$ ، $v_3 = 3 + 7x + 2x^2$

- (أ) أوجد $[T(v_1)]_B$, $[T(v_2)]_B$ و $[T(v_3)]_B$.
 (ب) أوجد $T(v_1)$, $T(v_2)$ و $T(v_3)$.
 (ج) أوجد $T(1 + x^2)$.

١٥ - أثبت أنه إذا كان $T : V \rightarrow W$ هو التحويل الصفري (مثال ٣) فإن مصفوفة T بالنسبة إلى أى أساسين للفضاءين V ، W هي مصفوفة صفرية .

١٦ - أثبت أنه إذا كان التحويل $T : V \rightarrow V$ تقليصاً أو تمديداً للفضاء V (مثال ٥) فإن مصفوفة T بالنسبة إلى أى أساس للفضاء V هي مصفوفة قطرية .

١٧ - اعتبر $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ أساساً لفضاء خطي V . أوجد المصفوفة بالنسبة إلى B للمؤثر الخطي $T : V \rightarrow V$ المعرفة بواسطة $T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3$, $T(v_3) = v_4$, $T(v_4) = v_1$.

١٨ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) اعتبر $D : P_2 \rightarrow P_2$ هو مؤثر التفاضل $D(p) = p'$ في الجزأين (أ) ، (ب) أوجد مصفوفة D بالنسبة إلى الأساس $B = \{p_1, p_2, p_3\}$.

- (أ) $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2$
 (ب) $p_1 = 2, p_2 = 2 - 3x, p_3 = 2 - 3x + 8x^2$
 (ج) استخدم مصفوفة الجزء (أ) لحساب $D(6 - 6x + 24x^2)$
 (د) كرر المطلوب في الجزء (ج) باستخدام مصفوفة الجزء (ب) .

١٩ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) . في كل جزء ، $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ هو أساس فضاء جزئي V من الفضاء الخطي للدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي . أوجد المصفوفة بالنسبة إلى B لمؤثر التفاضل $D : V \rightarrow V$.

- (أ) $f_1 = 1, f_2 = \sin x, f_3 = \cos x$
 (ب) $f_1 = 1, f_2 = e^x, f_3 = e^{2x}$
 (ج) $f_1 = e^{2x}, f_2 = xe^{2x}, f_3 = x^2e^{2x}$

٥ - ٤ الاتفاق

تعتمد مصفوفة المؤثر الخطي $T : V \rightarrow V$ على الأساس المختار للفضاء V . وواحدة من المسائل الأساسية في الجبر الخطي هي اختيار أساساً للفضاء V بحيث يجعل مصفوفة T بسيطة قدر الإمكان . غالباً نبدأ في حل هذه المسألة أولاً بإيجاد مصفوفة T بالنسبة إلى أساس « بسيط » مثل الأساس المعتاد . وعادة فإن هذا الاختيار لا يعطى أبسط مصفوفة للمؤثر T ولهذا فإننا بعد ذلك نبحث عن طريقة لتغيير الأساس لكي نبسط المصفوفة . ولكي نحل مثل هذه المسألة يجب أن نعرف كيف يؤثر تغيير الأساس على مصفوفة المؤثر الخطي ، سندرس هذه المسألة في هذا القسم .

والنظرية التالية هي مفتاح النتائج في هذا القسم .

نظرية ٥ : اعتبر $T: V \rightarrow V$ مؤثراً خطياً في فضاء خطي V منتهي البعد . إذا كانت A هي مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B و A' هي مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B' ، فإن

$$A' = P^{-1}AP \quad (5.11)$$

حيث P هي مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

لإثبات هذه النظرية سيكون من المناسب أن نصف العلاقة

$$Au = v$$

تصويرياً بكتابة

$$u \xrightarrow{A} v$$

حيث أن A هي مصفوفة T بالنسبة إلى B و A' هي مصفوفة T بالنسبة إلى B' فإن العلاقتين التاليتين تتحققان لجميع x من V .

$$A[x]_B = [T(x)]_B$$

وأيضاً

$$A'[x]_{B'} = [T(x)]_{B'}$$

ويمكن كتابتهما هكذا

$$[x]_B \xrightarrow{A} [T(x)]_B \quad (5.12)$$

$$[x]_{B'} \xrightarrow{A'} [T(x)]_{B'}$$

لمعرفة كيف ترتبط المصفوفتان A ، A' . اعتبر P هي مصفوفة التحويل من الأساس B' إلى الأساس B فتكون P^{-1} هي مصفوفة الانتقال من B إلى B' . وإذن

$$P[x]_{B'} = [x]_B$$

وأيضاً

$$P^{-1}[T(x)]_B = [T(x)]_{B'}$$

ويمكن كتابتهما هكذا

$$[x]_{B'} \xrightarrow{P} [x]_B \quad (5.13)$$

وأيضاً

$$[T(x)]_B \xrightarrow{P^{-1}} [T(x)]_{B'}$$

ويمكن لصفط الحجم أن نربط العلاقتين (5.12) ، (5.13) معاً في شكل واحد كما يلي :

$$\begin{array}{ccc} [x]_B & \xrightarrow{A} & [T(x)]_B \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ [x]_{B'} & \xrightarrow{A'} & [T(x)]_{B'} \end{array}$$

يوضح هذا الشكل أنه توجد طريقتان للحصول على المصفوفة $[T(x)]_{B'}$ من المصفوفة $[x]_{B'}$.
يمكننا أن نأخذ المسار الأسفل عبر الشكل ، وهذا يعنى

$$A'[x]_{B'} = [T(x)]_{B'} \quad (5.14)$$

أو يمكن أن نذهب إلى أعلى من الطرف الأيسر ثم عبر القمة ثم أسفل الطرف الأيمن ، وهذا يعنى

$$P^{-1}AP[x]_{B'} = [T(x)]_{B'} \quad (5.15)$$

ينتج من (5.14) ، (5.15) أن

$$P^{-1}AP[x]_{B'} = A'[x]_{B'} \quad (5.16)$$

لجميع قيم x من V . ينتج من (5.16) والجزء (b) من تمرين (١١) أن

$$P^{-1}AP = A'$$

وهذا يثبت نظرية (٥) .

تذكير : عند تطبيق نظرية (٥) من السهل نسيان ما إذا كانت P هي مصفوفة الانتقال من B إلى B' (خطأ) أو من B' إلى B (صواب) . وقد يساعدنا أن نسمى B الأساس القديم ، B' الأساس الجديد ، A المصفوفة القديمة ، A' المصفوفة الجديدة . حيث أن P هي مصفوفة الانتقال من B' إلى B ، P^{-1} هي مصفوفة الانتقال من B إلى B' فإن (5.11) يمكن التعبير عنها هكذا :

$$P = (\text{المصفوفة القديمة}) P^{-1}$$

حيث P هي مصفوفة الانتقال من الأساس الجديد إلى الأساس القديم .

مثال (٢٦) :

اعتبر $T : R^2 \rightarrow R^2$ معرفة بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر T ، أى مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B = \{e_1, e_2\}$ حيث

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبعد ذلك استخدم نظرية (٥) لتحويل هذه المصفوفة إلى مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B' = \{u_1, u_2\}$ حيث

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل : من صيغة T

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

وأيضاً

$$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وعليه فمصفوفة T المعتادة هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

نحتاج بعد ذلك إلى مصفوفة الانتقال من B' إلى B . وللمصفوفة الانتقال هذه يجب أن نجد مصفوفتي الأحداثيات لتجهي الأساس B' بالنسبة إلى الأساس B . بالنظر نجد

$$u_1 = e_1 + e_2$$

$$u_2 = e_1 + 2e_2$$

وإذن

$$[u_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad [u_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذا فإن مصفوفة الانتقال من B' إلى B هي

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ويمكن للقارئ أن يتأكد من أن

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا من نظرية (٥) تكون مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B' هي

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

يوضح هذا المثال أن الأساس المعتاد للفضاء الخطي لا ينتج بالضرورة أبسط مصفوفة للمؤثر الخطي . في هذا

المثال لم تكن المصفوفة المعتادة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

سهلة التركيب مثل المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

بالنسبة إلى الأساس B' . المصفوفة (5.17) هي مثال للمصفوفة القطرية ، أي أنها مصفوفة مربعة كل مكوناتها غير القطرية هي الصفر . للمصفوفات القطرية الكثير من الخواص المرغوب فيها . فمثلاً القوة k لمصفوفة قطرية

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix}$$

فلرفع مصفوفة قطرية إلى القوة k نحتاج فقط لرفع كل عنصر قطري إلى القوة k . أما بالنسبة إلى المصفوفة غير القطرية فإننا نحتاج إلى حسابات أكثر كثيراً للحصول على القوة k للمصفوفة. والمصفوفات القطرية أيضاً خواص مفيدة أخرى.

سنناقش في الباب القادم مسألة إيجاد الأساسات التي تنتج مصفوفات قطرية للمؤثرات الخطية. ونعتبر نظرية (٥) دافعاً للتعريف التالي.

تعريف : إذا كانت A ، B مصفوفتين مربعيتين فنقول أن B متفقة مع A إذا وجدت مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث تكون $B = P^{-1}AP$.

لاحظ أن المعادلة $B = P^{-1}AP$ يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$A = (P^{-1})^{-1} B P^{-1} \quad \text{أو} \quad A = P B P^{-1}$$

بوضع $Q = P^{-1}$ يعطى

$$A = Q^{-1} B Q$$

وهي تخبرنا بأن A متفقة مع B . لذا فإن B تكون متفقة مع A إذا وفقط إذا كانت A متفقة مع B . ومن ثم سنقول عادة ببساطة أن A ، B متفقتان.

وبهذا الاصطلاح تنص نظرية (٥) أن أى مصفوفتين تمثلان نفس المؤثر الخطى $T: V \rightarrow V$ بالنسبة إلى أساسين مختلفين تكونان متفقتين.

تمارين ٥ - ٤

في التمارين (١ - ٧) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى B ، واستخدم نظرية (٥) لحساب مصفوفة T بالنسبة إلى B' .

١ - $T: R^2 \rightarrow R^2$ يعرف بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

حيث $B' = \{v_1, v_2\}$ ، $B = \{u_1, u_2\}$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٢ - $T : R^2 \rightarrow R^2$ يعرف بواسطة

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

حيث $B' = \{v_1, v_2\}$ ، $B = \{u_1, u_2\}$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

٣ - $T : R^2 \rightarrow R^2$ هو الدوران حول نقطة الأصل بزاوية 45° و B ، B' الأساسان في تمرين (١) .

٤ - $T : R^3 \rightarrow R^3$ معرف بواسطة

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

B هو الأساس المعتاد للفضاء R^3 ، $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ ، حيث

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٥ - $T : R^3 \rightarrow R^3$ هو المسقط العمودي على مستوى xy ، B و B' هما كما في تمرين (٤) .

٦ - $T : R^2 \rightarrow R^2$ معرف بواسطة $T(x) = 5x$ و B ، B' ، هما الأساسان في تمرين (٢) .

٧ - $T : P_1 \rightarrow P_1$ معرف بواسطة $T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x+1)$ ، $B = \{p_1, p_2\}$ ، $B' = \{q_1, q_2\}$ حيث $p_1 = 6 + 3x$ ، $p_2 = 10 + 2x$ ، $q_1 = 2$ ، $q_2 = 3 + 2x$

٨ - أثبت أنه إذا كانت A ، B مصفوفتين متفقتين فإن $\det(A) = \det(B)$.

٩ - أثبت أن المصفوفات المتفقة لها نفس الرتبة .

١٠ - أثبت أنه إذا كانت A ، B مصفوفتين متفقتين فإن A^2 ، B^2 أيضاً تكونان متفقتين . وبصورة أم
أثبت أن A^k ، B^k تكونان متفقتين ، حيث k أى عدد صحيح موجب .

١١ - اعتبر C ، D مصفوفتين من النوع $m \times n$ أثبت أن :

(أ) إذا كان $Cx = Dx$ لكل x من R^n ، فإن $C = D$.

(ب) إذا كان $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساساً لفضاء خطي V وكان $C[x]_B = D[x]_B$ لكل x من V ، فإن $C = D$.

٦ - القيم الذاتية - المتجهات الذاتية

٦ - ١ القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

في كثير من المسائل في العلوم والرياضيات يعطى مؤثر خطى $T: V \rightarrow V$ ويكون من الاهمية تعيين تلك الأعداد القياسية λ بحيث يكون للمعادلة $Tx = \lambda x$ حل غير صفري . سنناقش هذه المسألة في هذا القسم ، وفي أقسام تالية سنبحث بعض تطبيقاتها .

تعريف : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ ، فالمتجه غير الصفري x في R^n يسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A إذا كانت $Ax = \lambda x$ مضاعفاً قياسياً للمتجه x بمعنى أن

$$Ax = \lambda x$$

لعدد قياسي λ . العدد القياسي λ يسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A ويقال أن x متجه ذاتى مناظر للعدد القياسي λ . القيم الذاتية لمصفوفة A تسمى أيضاً القيم الخاصة أو القيم المميزة أو الجذور الكامنة للمصفوفة A .

مثال (١) :

$$\text{المتجه } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ هو متجه ذاتى للمصفوفة}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

ينظر القيمة الذاتية $\lambda = 3$ إذ أن

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

يوجد للقيم الذاتية والمتجهات الذاتية تفسير هندسى مفيد في R^2 ، R^3 . إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A مناظرة للمتجه x ، فإن $Ax = \lambda x$ ، ولذا فالضرب في A يمدد x أو يقلص x أو يعكس اتجاه x ، وذلك يتوقف على قيمة λ (أنظر شكل ٦ - ١) .

لإيجاد القيم الذاتية لمصفوفة A من النوع $n \times n$ نكتب $Ax = \lambda x$ على الصورة

$$Ax = \lambda Ix$$

أو بالصورة المكافئة

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (6.1)$$

ولكى تكون λ قيمة ذاتية ، يجب أن يكون لهذه المعادلة حل غير صفري . مع ذلك ، من نظرية (١٣) قسم ٤ - ٦ سيكون للمعادلة حل غير صفري إذا وفقط إذا كان

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمصفوفة A ، وتكون الأعداد القياسية المحققة لهذه المعادلة هي القيم الذاتية للمصفوفة A .



(شكل ١ - ٦) (أ) تمدد $\lambda > 1$. (ب) تقلص $0 < \lambda < 1$. (ج) عكس اتجاه $\lambda < 0$.

مثال (٢) :

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل : حيث أن

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

وأن

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

فإن المعادلة المميزة تكون هي المعادلة

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

وحلول هذه المعادلة هي $\lambda = 2$ ، $\lambda = 1$ ؛ وهاتان هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A .

مثال (٣) :

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل : بالمضي على نسق مثال (٢) :

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

ولذلك فيجب على القيم الذاتية للمصفوفة A أن تحقق معادلة الدرجة الثانية $\lambda^2 + 1 = 0$ حيث أن الحلول الوحيدة لهذه المعادلة هي الأعداد التخيلية $\lambda = i$ ، $\lambda = -i$ ، وحيث أننا نفترض أن كل أعدادنا القياسية أعداد حقيقية ، فلا يكون للمصفوفة A أى قيم ذاتية(*) .

مثال (٤) :

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل : كما فى الأمثلة السابقة

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

لذلك يجب على القيم الذاتية للمصفوفة A أن تحقق معادلة الدرجة الثالثة .

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \quad (6.2)$$

حل هذه المعادلة ، سنبدأ بالبحث عن حلول من الأعداد الصحيحة . يمكن تبسيط هذه المهمة كثيراً باستغلال حقيقة أن كل الحلول التي هي أعداد صحيحة (إذا وجد أى منها) لمعادلة كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

يجب أن تكون قواسم للمحد الثابت c_n . لذلك فالحلول الوحيدة الممكنة من الأعداد الصحيحة للمعادلة (6.2) هي قواسم للعدد -4 ، أى ± 1 ، ± 2 ، ± 4 . يبين التمييز المتتابع هذه القيم أن $\lambda = 4$ حل من الأعداد الصحيحة . ونتيجة لذلك ، فإن $\lambda - 4$ يجب أن تكون عاملاً من عوامل الطرف الأيسر للمعادلة (6.2) بقسمة $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$ على $\lambda - 4$ نين أن (6.2) يمكن كتابتها كالتالى

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

لذلك فالحلول الباقية للمعادلة (6.2) تحقق معادلة الدرجة الثانية

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

(*) كما أكدنا فى قسم ٤ - ٢ ، توجد بعض التطبيقات التى تتطلب أعداداً قياسية مركبة وفراغ اتجاهى مركب . فى هذه الحالات ، يسمح للمصفوفات أن يكون لها قيم ذاتية مركبة . مع ذلك ، فى هذا النص ، سنأخذ فى الاعتبار فقط القيم الذاتية الحقيقية .

والتي يمكن حلها بالصيغة التربيعية . وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\lambda = 2 + \sqrt{3} \quad \text{و} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3} \quad \lambda = 4$$

ملحوظة : في المسائل العملية ، غالباً ماتكون المصفوفة A كبيرة لدرجة أن يكون من غير العمل تعيين المعادلة المميزة ، لذلك تستخدم طرق تقريبية متعددة لإيجاد القيم الذاتية . سنشرح بعض هذه الطرق في الباب الثامن .

تلخص النظرية التالية نتائجنا التي ذكرناها .

نظرية ١ : إذا كانت A مصفوفة ما من النوع $n \times n$ ، فالتقارير التالية تكون متكافئة .

(أ) λ قيمة ذاتية للمصفوفة A .

(ب) يوجد لنظام المعادلات $(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ حلول غير تافهة .

(ج) يوجد متجه غير صفري \mathbf{x} في R^n بحيث تكون $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

(د) λ حل حقيق للمعادلة المميزة $\det(\lambda I - A) = 0$.

الآن ونحن نعرف كيف نوجد القيم الذاتية فإننا نرجع إلى مسألة إيجاد المتجهات الذاتية . المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة لقيمة ذاتية λ هي المتجهات غير الصفري التي تحقق $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ بطريقة مكافئة ، المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة λ هي المتجهات غير الصفري في فراغ الحل للمعادلة $(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$. يسمى فراغ الحل هذا بالفراغ الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ .

مثال (٥) :

أوجد أساسات الفراغات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل : المعادلة المميزة للمصفوفة A هي $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$ (حق ذلك) ، وإذن القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 5$ ، $\lambda = 1$

بالتعريف ، يكون

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

متجهاً ذاتياً للمصفوفة A المناظر للقيمة λ إذاً فقط إذا كان \mathbf{x} حلاً غير تافه للمعادلة $(\lambda I - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ، أي المعادلة

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

إذا كانت $\lambda = 5$ فإن (6.3) تصبح

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام يعطى (حقق ذلك)

$$x_1 = -s \quad x_2 = s \quad x_3 = t$$

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة $\lambda = 5$ هي المتجهات غير الصفريّة التي على الصورة

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث أن

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

غير مرتبطين خطياً ، فإنهما يكونان أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 5$.

إذا كانت $\lambda = 1$ فإن (6.3) تصبح

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام يعطى (حقق ذلك)

$$x_1 = t \quad x_2 = t \quad x_3 = 0$$

لذلك فإن المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda = 1$ هي المتجهات غير الصفريّة التي على الصورة

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وإذن المتجه

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أساس للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$.

يمكن تعريف المتجهات الذاتية والقيم الذاتية للمؤثرات الخطية مثلما تم للمصفوفات . يسمى العدد القياسي λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي $T: V \rightarrow V$ إذا وجد متجه غير صفري x في V بحيث أن $Tx = \lambda x$. ويسمى المتجه x متجهاً ذاتياً للمؤثر T مناظراً للقيمة λ . بطريقة مكافئة ، المتجهات الذاتية للمؤثر T المناظرة للقيمة λ هي المتجهات غير الصفري في نواة $\lambda I - T$ (أنظر تمرين ١٩) . تسمى هذه النواة بالفراغ الذاتي للمؤثر T المناظر للقيمة λ .

يمكن إثبات أنه إذا كان V فراغ ذات بعد محدود وكانت A مصفوفة المؤثر T بالنسبة إلى أى أساس B ، فإن :

- ١ - القيم الذاتية للمؤثر T هي القيم الذاتية للمصفوفة A .
 - ٢ - يكون المتجه x متجهاً ذاتياً للمؤثر T مناظراً للقيمة λ إذا وفقط إذا كانت مصفوفة إحداثياته $[x]_B$ متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظراً للقيمة λ .
- نترك البراهين للدارسين .

مثال (٦) :

أوجد القيم الذاتية وأساسات الفراغات الذاتية للمؤثر الخطي $T: P_2 \rightarrow P_2$ المعرف بالصيغة

$$T(a + bx + cx^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2$$

الحل : مصفوفة المؤثر T بالنسبة إلى الأساس المعتاد $\{1, x, x^2\}$ هي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية للمؤثر T هي القيم الذاتية للمصفوفة A أى أن $\lambda = 1$ ، $\lambda = 5$ (أنظر مثال (٥)) . ومن مثال (٥) أيضاً الفراغ الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda = 5$ له الأساس $\{u_1, u_2\}$ والفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$ له الأساس $\{u_3\}$ حيث

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفات هي مصفوفات الأحداثيات بالنسبة إلى B المكون من

$$p_1 = -1 + x \quad p_2 = x^2 \quad p_3 = 1 + x$$

عليه يكون $\{-1 + x, x^2\}$ هو أساس للفراغ الذاتي للمؤثر T المناظر للقيمة $\lambda = 5$ ويكون $\{1 + x\}$ أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$.

تمارين ٦ - ١

١ - أوجد المعادلات المميزة للمصفوفات التالية :

$$\begin{array}{lll} (أ) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} & (ب) \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} & (ج) \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \\ (د) \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & (هـ) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (و) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

٢ - أوجد القيم الذاتية للمصفوفات في تمرين (١) .

٣ - أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمصفوفات في تمرين (١) .

٤ - في كل جزء من تمرين (١) ، افترض أن $T: R^2 \rightarrow R^2$ هو الضرب في المصفوفة المعطاة ، صف وصفاً إجماليًا كل الخطوط في R^2 التي ترسم إلى نفسها تحت الراسم T .

٥ - أوجد المعادلات المميزة للمصفوفة التالية :

$$\begin{array}{lll} (أ) \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} & (ب) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (ج) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix} \\ (د) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix} & (هـ) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} & (و) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

٦ - أوجد القيم الذاتية للمصفوفات في تمرين (٥) .

٧ - أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمصفوفات في تمرين (٥) .

٨ - أوجد المعادلات المميزة للمصفوفات التالية :

$$\begin{array}{ll} (أ) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (ب) \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

٩ - أوجد القيم الذاتية للمصفوفات في تمرين (٨) .

١٠ - أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمصفوفات في تمرين (٨) .

١١ - (لقراء المادة الاختيارية) ليكن $T: P_2 \rightarrow P_2$ معرفاً بالصيغة

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2.$$

(أ) أوجد القيم الذاتية للمؤثر T .

(ب) أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمؤثر T .

١٢ - ليكن $T : M_{22} \rightarrow M_{22}$ معرفة بالصيغة

$$T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد القيم الذاتية للمؤثر T .

(ب) أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمؤثر T .

١٣ - أثبت أن $\lambda = 0$ تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت A غير قابلة للانعكاس.

١٤ - إذا كانت A مصفوفة مربعة ، فإن $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ تسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A . أثبت أن الحد الثابت في كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة A من الفراغ $n \times n$ هو $(-1)^n \det(A)$.

إرشاد : الحد الثابت هو قيمة كثيرة الحدود المميزة عندما $\lambda = 0$.

١٥ - أثر مصفوفة مربعة A هو مجموع العناصر في القطر الرئيسي. أثبت أن المعادلة المميزة لمصفوفة A من النوع 2×2 هي $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ حيث $\text{tr}(A)$ هو أثر A .

١٦ - برهن أن القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية هي عناصر القطر الرئيسي

١٧ - أثبت أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن λ^2 قيمة ذاتية للمصفوفة A^2 ، بشكل أم ، أثبت أن λ^n قيمة ذاتية للمصفوفة A^n حيث n عدد صحيح .

١٨ - استخدم نتائج التمرينين (١٦ ، ١٧) لإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة A^9 حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

١٩ - (لقراء المادة الاختيارية) لتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي $T : V \rightarrow V$ أثبت أن المتجهات الذاتية

للمؤثر T المناظرة للقيمة λ هي المتجهات غير الصفرية في نواة $\lambda I - T$.

٦ - ٢ التحويل الى الصورة القطرية

في هذا القسم وفي القسم التالي سنهم بالمسألتين التاليتين :

مسألة (١) : إذا أعطينا مؤثراً خطياً $T : V \rightarrow V$ على فراغ خطي ذي بعد محدود فهل يوجد أساس للفراغ V بالنسبة له تكون المصفوفة T قطرية ؟

مسألة (٢) : إذا أعطينا مؤثراً خطياً $T : V \rightarrow V$ على فراغ ضرب داخلي ذي بعد محدود ، فهل يوجد أساس عيارى متعامد للفراغ V بالنسبة له تكون مصفوفة T قطرية ؟

إذا كانت A مصفوفة المؤثر $T: V \rightarrow V$ بالنسبة إلى أساس ما ، فإن مسألة (١) تكافئ السؤال عن وجود تغيير للأساس بحيث تكون المصفوفة الجديدة للمؤثر T قطرية . من نظرية (٥) قسم (٥-٤) ، المصفوفة الجديدة للمؤثر T ستكون $P^{-1}AP$ حيث P هي مصفوفة الانتقال بالمتناسبة . إذا كان V فراغ ضرب داخلي وكانت الأساسات عيارية متعامدة ، فمن نظرية (٢٧) قسم (٤ - ١٠) ، ستكون P عمودية . وهذا يؤدي بنا إلى الصياغة التالية بالمصفوفات للمسائل السابقة .

مسألة (١) : (صيغة بالمصفوفات) إذا أعطينا مصفوفة مربعة A ، فهل توجد مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية ؟

مسألة (٢) : (صيغة بالمصفوفات) إذا أعطينا مصفوفة مربعة A ، فهل توجد مصفوفة عمودية P بحيث تكون $P^{-1}AP = (P^t AP)$ قطرية ؟
توحى هذه المسائل بالتعاريف الآتية :

تعريف : تسمى المصفوفة المربعة A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية إذا وجدت مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية ، ويقال إن المصفوفة P تحول A إلى الصورة القطرية .

تعتبر النظرية التالية الأداة الأساسية لدراسة قابلية التحويل إلى الصورة القطرية ويبرز برهانها طريقة تحويل مصفوفة ما إلى الصورة القطرية .

نظرية ٢ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ ، فإن التقارير التالية مكافئة .

(أ) A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

(ب) للمصفوفة A عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً .

البرهان : (أ) \Leftrightarrow (ب) حيث إن A بالفرض قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ، إذن توجد مصفوفة قابلة للانعكاس .

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

بحيث تكون $P^{-1}AP = D$ لتكن $P^{-1}AP = D$ حيث

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

إذن $AP = PD$ ، أى أن

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

إذا افترضنا الآن أن p_1, p_2, \dots, p_n ترمز لمتجهات الأعمدة المصفوفة P فمن (6.4) الأعمدة المتتابعة للمصفوفة AP هي $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n$ ولكن من مثال (١٧) بقسم (٤-١) ، الأعمدة المتتابعة للمصفوفة AP هي Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n لذلك يجب أن يكون لدينا

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n \quad (6.5)$$

حيث أن P قابلة للانعكاس ، فإن متجهات أعمدتها تكون جميعها غير صفرية ، إذن استخدام (6.5) ، تكون $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ قيمًا ذاتية للمصفوفة A وتكون p_1, p_2, \dots, p_n متجهات ذاتية مناظرة . حيث أن P قابلة للانعكاس ، فينتج من نظرية (١٣) في قسم (٤-٦) أن p_1, p_2, \dots, p_n غير مرتبطة خطياً وإذن المصفوفة عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً .

(ب) \Leftarrow (أ) افترض أن A لها عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً p_1, p_2, \dots, p_n

بقيم ذاتية مناظرة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ولكن

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

هي المصفوفة التي متجهات الأعمدة لها هي p_1, p_2, \dots, p_n باستخدام مثال (١٧) في قسم (٤-١) ، تكون أعمدة حاصل الضرب AP هي

$$Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$$

ولكن

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$$

وإذن

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

(6.6)

حيث D هي المصفوفة القطرية التي لها القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ على القطر الرئيسى . حيث أن متجهات الأعمدة للمصفوفة A غير مرتبطة خطياً ، فإن P قابلة للانعكاس وإذن يمكن كتابة (6.6) على الصورة $P^{-1}AP = D$ أى أن ، A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

نحصل من هذا البرهان على الطريقة التالية للتحويل إلى الصورة القطرية ، مصفوفة A قابلة لهذا التحويل ومن نوع $n \times n$ ،

خطوة (١) : أوجد عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً للمصفوفة A ولتكن p_1, p_2, \dots, p_n .

خطوة (٢) كون المصفوفة P التي متجهاتها أعمدتها p_1, p_2, \dots, p_n

خطوة (٣) : ستكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية عناصرها القطرية المتتامة هي $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ حيث λ_i هي القيمة الذاتية المناظرة للمتجه p_i ، $i = 1, 2, \dots, n$

مثال (٧) :

أوجد مصفوفة P تحول إلى الصورة القطرية المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل : من مثال (٥) تكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 1$ ، $\lambda = 5$ وأيضاً من هذا المثال المتجهان

$$p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يكونان أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 5$ ويكون

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$ من السهل أن نتحقق أن $\{p_1, p_2, p_3\}$ غير مرتبطة خطياً ، لذلك فإن

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تحول A إلى الصورة القطرية . للتأكد من ذلك ، يجب على القارئ أن يتحقق من أن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ليس هناك ترتيب مفضل لأعمدة P حيث ان المنصر القطرى رقم i للمصفوفة $P^{-1}AP$ يكون قيمة ذاتية لمتجه العمود رقم i للمصفوفة P ، فتغيير ترتيب أعمدة P يغير فقط ترتيب القيم الذاتية على قطر المصفوفة $P^{-1}AP$ فلو كنا قد كتبنا

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

في المثال السابق ، لكننا حصلنا على

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال (٨) :

المعادلة المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

هى

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0$$

وإذن $\lambda = -1$ هى القيمة الذاتية الوحيدة للمصفوفة A ، وتكون المتجهات المناظرة للقيمة $\lambda = -1$ هى حلول $(-I - A)x = 0$ ، أى حلول النظام

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

حلول هذا النظام هى $x_1 = t$ ، $x_2 = t$ (حقق ذلك) ، إذن فالفراغ الذاتى يتكون من كل المتجهات التى على الصورة

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث إن هذا الفراغ من بعد 1 ، فلا يكون للمصفوفة A متجهان ذاتيان غير مرتبطين خطياً ، ولذلك تكون A غير قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

مثال (٩) :

ليكن $T : R^3 \rightarrow R^3$ المؤثر الخطى المعطى بالصيغة

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}$$

أوجد أساساً للفراغ R^3 بالنسبة له تكون المصفوفة T قطرية .

الحل : إذا كانت $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ترمز للأساس المعتاد للفراغ R^3 ، فإن

$$T(e_1) = T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, T(e_2) = T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T(e_3) = T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ولذلك تكون المصفوفة المعتادة للمؤثر T هي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

نريد الآن أن نغير من الأساس المعتاد لأساس جديد $B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ لنحصل على مصفوفة قطرية A' للمؤثر T . إذا افترضنا أن P هي مصفوفة الانتقال من الأساس المجهول B' إلى الأساس المعتاد B ، فنظرية (٥) بقسم (٥-٤) ، سترتبط A' ، A بالعلاقة

$$A' = P^{-1}AP$$

بمعنى أخرى ، مصفوفة الانتقال P تحول A إلى الصورة القطرية . وجدنا هذه المصفوفة في مثال (٧)

ومن عملنا في ذلك المثال، نجد أن

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن P تمثل مصفوفة الانتقال من الأساس $B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ إلى الأساس المعتاد

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ فإن أعمدة P تكون هي $[u'_1]_B$ ، $[u'_2]_B$ ، $[u'_3]_B$ وهذا تكون

$$[u'_1]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [u'_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [u'_3]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$u'_1 = (-1)e_1 + (1)e_2 + (0)e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u'_2 = (0)e_1 + (0)e_2 + (1)e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u'_3 = (1)e_1 + (1)e_2 + (0)e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هى متجهات الأساس التى تنتج المصفوفة القطرية A' للمؤثر T .

الآن وقد درسنا طرق التحويل إلى الصورة القطرية ، أية مصفوفة قابلة لهذا التحويل ، نمود إلى السؤال متى تكون المصفوفة قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ؟ ستساعدنا النتيجة التالية لدراسة هذا السؤال وستؤجل برهانها إلى نهاية هذا القسم .

نظرية ٣ : إذا كانت v_1, v_2, \dots, v_n متجهات ذاتية للمصفوفة A مناظرة لقيم ذاتية مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فإن $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فئة غير مرتبطة خطياً .

كنتيجة لهذه النظرية ، نحصل على النتيجة المفيدة التالية .

نظرية ٤ : إذا كانت المصفوفة A من النوع $n \times n$ لها عدد n من القيم الذاتية المختلفة ، فإن A تكون قابلة للتحويل للصورة القطرية .

البرهان : إذا كانت v_1, v_2, \dots, v_n متجهات ذاتية مناظرة للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فنظرية (٣) ، تكون v_1, v_2, \dots, v_n غير مرتبطة خطياً . وإذن من نظرية (٢) ، تكون A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

مثال (١٠) :

رأينا فى مثال (٤) أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاث قيم ذاتية مختلفة هى $\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3}, \lambda = 2 - \sqrt{3}$ وعليه فإن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية . بالإضافة إلى ذلك فإن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

لمصفوفة P قابلة للانعكاس . يمكن ، إذا رغب فى ذلك ، إيجاد المصفوفة P باستخدام الطريقة المبينة فى مثال (٧) .

مثال (١١) :

عكس نظرية (٤) ليس صحيحاً ، أى إن ، قد تكون مصفوفة A من نوع $n \times n$ قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية رغم أن ليس لها n من القيم الذاتية المختلفة على سبيل المثال ، إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن المعادلة المميزة للمصفوفة A هي :

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)^2 = 0$$

وإذن $\lambda = 3$ هي القيمة الذاتية الوحيدة للمصفوفة A . ولكن من الواضح أن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية حيث إنه مع أخذ $P = I$ يكون

$$P^{-1}AP = I^{-1}AI = A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ملحوظة : نظرية (٣) حالة خاصة من نتيجة أكثر تعميماً افترض أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ قيم ذاتية مختلفة وأنا نختار فئة غير مرتبطة خطياً في كل من الفراغات الذاتية المناظرة . إذا أديجنا كل هذه المتجهات في فئة واحدة ، فيظل الناتج فئة غير مرتبطة خطياً . على سبيل المثال ، إذا اخترنا ثلاثة متجهات غير مرتبطة خطياً من فراغ ذاتي واحد واخترنا متجهين غير مرتبطين خطياً من فراغ ذاتي آخر فإن المتجهات الخمسة معاً تكون فئة غير مرتبطة خطياً . نحدد البرهان .

مادة اختيارية :

نختم هذا القسم ببرهان لنظرية (٣) .

البرهان : لتكن v_1, v_2, \dots, v_k متجهات ذاتية للمصفوفة A مناظرة لقيم ذاتية مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ سنفترض أن v_1, v_2, \dots, v_k مرتبطة خطياً فنحصل على تناقض . من ثم يمكننا أن نخلص إلى أن v_1, v_2, \dots, v_k غير مرتبطة خطياً . حيث أن أي متجه ذاتي يكون ، من التعريف ، غير صفرياً ، فإن $\{v_1\}$ غير مرتبطة خطياً . ليكن r هو أكبر رقم بحيث تكون $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ غير مرتبطة خطياً حيث أننا مفترضين أن $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ مرتبطة خطياً ، فإن r تحقق $1 \leq r < k$. فضلاً عن أنه ، من تعريف r تكون $\{v_1, v_2, \dots, v_{r+1}\}$ مرتبطة خطياً . لذلك فتوجد أعداد قياسية c_1, c_2, \dots, c_{r+1} ليست كلها أصفاراً ، بحيث أن

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad (6.7)$$

بضرب كلا طرفي (6.7) في A وباستخدام

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \dots, Av_{r+1} = \lambda_{r+1} v_{r+1}$$

نحصل على

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad (6.8)$$

ضرب كل طرفي (6.7) في λ_{r+1} وطرح الناتج من (6.8) يؤدي إلى

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_{r+1}) v_2 + \dots + c_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r = 0$$

حيث أن $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ غير مرتبطة خطياً ، فتستلزم هذه المعادلة أن تكون

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2 (\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \dots = c_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

وحيث أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}$ مختلفة ، فيتبع ذلك

$$c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0 \quad (6.9)$$

التمويض عن هذه القيم في (6.7) يؤدي إلى

$$c_{r+1}v_{r+1} = 0$$

حيث أن المتجه الذاتي v_{r+1} غير صفري ، فيتبع ذلك

$$c_{r+1} = 0 \quad (6.10)$$

معادلتا (6.9) ، (6.10) تناقضان حقيقة أن c_1, c_2, \dots, c_{r+1} ليست كلها أصفاراً . وهذا يكمل البرهان .

تمارين ٦ - ٢

اثبت أن المصفوفات في التمارين من ١ إلى ٤ ليست قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix} - ٤ \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - ٣ \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - ٢ \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - ١$$

في التمارين من (٥) إلى (٨) أوجد مصفوفة P تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية وعين $P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} - ٦ & A &= \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix} - ٥ \\ A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - ٨ & A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - ٧ \end{aligned}$$

في التمارين من (٩) إلى (١٤) ، حدد ما إذا كانت A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية . إذا كانت

كذلك ، فأوجد المصفوفة P التي تحول A إلى الصورة القطرية وعين $P^{-1}AP$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} - ١٠ \quad A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix} - ٩$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - ١٢ \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} - ١١$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - ١٤ \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - ١٣$$

١٥ - ليكن $T : R^2 \rightarrow R^2$ المؤثر الخطي المعطى بالصيغة

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

أوجد أساساً للفراغ R^2 بالنسبة إليه تكون مصفوفة T قطرية .

١٦ - ليكن $T : R^3 \rightarrow R^3$ المؤثر الخطي المعطى بالصيغة

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

أوجد أساساً للفراغ R^3 بالنسبة إليه تكون مصفوفة T قطرية .

١٧ - ليكن $T : P_1 \rightarrow P_1$ المؤثر الخطي المعطى بالصيغة .

$$T(a_0 + a_1x) = a_0 + (6a_0 - a_1)x$$

أوجد أساساً للفراغ P_1 بالنسبة إليه تكون مصفوفة T قطرية .

١٨ - لتكن A مصفوفة من النوع $n \times n$ و P مصفوفة قابلة للانعكاس من النوع $n \times n$. أثبت أن:

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P \quad (أ)$$

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP \quad (ب) \quad (k \text{ عدد صحيح موجب})$$

١٩ - استخدم تمرين (١٨) ليساعد في حساب A^{10} ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(إرشاد : أوجد مصفوفة P تحول A إلى الصورة القطرية واحسب $(P^{-1}AP)^{10}$)

٢٠ - لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

أثبت أن

(أ) إذا كانت $(a-d)^2 + 4bc > 0$ فإن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

(ب) إذا كانت $(a-d)^2 + 4bc < 0$ فإن A غير قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

٦ - ٣ التحويل العمودي إلى الصورة القطرية - المصفوفات المتماثلة

ندرس في هذا القسم ، المسألة الثانية الموضوعة في بداية قسم (٦-٢) . ستقودنا دراستنا إلى اعتبار نوع عام من المصفوفات يسمى المصفوفات المتماثلة .

خلال هذا القسم كله « عمودي » تعني عمودي بالنسبة إلى ضرب الداخلي الاقليدي على R^n .

تعريف : تسمى المصفوفة المربعة A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية . إذا وجدت مصفوفة عمودية P بحيث تكون $P^{-1}AP = (P^t AP)$ قطرية يقال إن المصفوفة P تحول عمودياً A إلى الصورة القطرية لدينا سؤالان يؤخذان بعين الاعتبار . الأول ، أى المصفوفات تكون قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية ، والثانى ، كيف نجد مصفوفة P لتجرى التحويل العمودى إلى الصورة القطرية لمصفوفة قابلة لهذا التحويل ؟ تختص النظرية التالية بالسؤال الأول .

نظرية ه : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فيشكلان التقريران التاليان :

(أ) A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية .

(ب) للمصفوفة A فئة عيارية متعامدة من n متجهاً ذاتياً .

البرهان : (أ) \Rightarrow (ب) . حيث أن A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية ، فتوجد مصفوفة عمودية P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية . كما تبين في برهان نظرية (٢) ، متجهات الأعمدة للمصفوفة P وعددها n هى المتجهات الذاتية للمصفوفة A حيث أن P عمودية ، فتجهات الأعمدة هذه تكون عيارية عمودية (انظر نظرية ٢٨ ، بقسم ٤ - ١٠) لهذا يكون لدى A عدد n من المتجهات الذاتية العيارية المتعامدة .

(ب) \Rightarrow (أ) . افترض أن المصفوفة A فئة عيارية متعامدة من n متجهاً ذاتياً $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. كما تبين من برهان نظرية (٢) ، فالمصفوفة P بهذه المتجهات الذاتية كأعمدة لها تحول A إلى الصورة القطرية . حيث أن هذه المتجهات الذاتية عيارية متعامدة ، فتكون P عمودية ولذلك تحول A إلى الصورة القطرية .

يثبت برهان نظرية (ه) أن أية مصفوفة A من النوع $n \times n$ القابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية تحول عمودياً إلى الصورة القطرية بواسطة أى مصفوفة P من النوع $n \times n$ فتشكل أعمدها . فئة عيارية متعامدة من متجهات ذاتية للمصفوفة A . لتكون D المصفوفة القطرية

$$D = P^{-1}AP$$

إذن

$$A = PDP^{-1}$$

أو ، حيث أن P عمودية

$$A = PDP^t$$

لذلك فإن

$$A^t = (PDP^t)^t = PD^tP^t = PDP^t = A$$

أى مصفوفة لها الخاصية

$$A = A^t$$

تسمى متماثلة . لذلك نكون قد أثبتنا أن أى مصفوفة قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية هى مصفوفة متماثلة . والمكس أيضاً صحيح ، إلا أننا نلحظ البرهان حيث أنه يخرج بنا عن مجال هذا الكتاب . تلخص النظرية التالية نقاشنا .

نظرية ٦ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فإن التقريرين التاليين يكونان متكافئين .
 (أ) A قابلة للتحويل العمودي إلى الصورة القطرية
 (ب) A متماثلة

مثال (١٢) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{المصفوفة}$$

متماثلة إذ أن $A = A^t$

نعود الآن إلى مسألة إيجاد مصفوفة عمودية P لتحويل مصفوفة متماثلة إلى الصورة القطرية . مفتاح الحل هو النظرية التالية ، والتي برهانها معطى في نهاية هذا القسم .

نظرية ٧ : إذا كانت A مصفوفة متماثلة ، فإن المتجهات الذاتية من فراغات ذاتية مختلفة تكون متعامدة .
 نحصل كنتيجة لهذه النظرية على الطريقة التالية للتحويل العمودي إلى الصورة القطرية لمصفوفة متماثلة .
 خطوة (١) : أوجد أساساً لكل فراغ ذاتي للمصفوفة A .

خطوة (٢) : طبق عملية جرام - شميدت على كل من هذه الأساسات لتحصل على أساس عيارى متعامد لكل فراغ ذاتي .

خطوة (٣) : كون المصفوفة P التي أعمدتها هي متجهات الأساس المنشأة في خطوة (٢) ، هذه المصفوفة تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية .

يجب أن يكون تبرير هذه الطريقة واضحاً . تؤكد نظرية (٧) على أن المتجهات الذاتية من فراغات ذاتية مختلفة تكون متعامدة ، في حين يؤكد تطبيق عملية جرام - شميدت على أن المتجهات الذاتية الناتجة داخل نفس الفراغ الذاتي تكون عيارية متعامدة . كذلك فإن فئة المتجهات الذاتية الناتجة بهذه الكيفية تكون عيارية المتعامد .

مثال (١٣) :

أوجد مصفوفة عمودية P تحول إلى الصورة القطرية المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل : المعادلة المميزة للمصفوفة A هي

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

لذلك فتكون القيم الذاتية هي $\lambda = 2$ ، $\lambda = 8$ يمكن بالطريقة المستخدمة في مثال (ه) إثبات أن

$$u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يكونان أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 2$. تطبيق عملية جرام - شميدت على $\{u_1, u_2\}$ يؤدي إلى المتجهات الذاتية المعيارية المتعامدة التالية (حقق ذلك)

$$v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad , \quad v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

الفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 8$ له الأساس

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تطبيق عملية جرام - شميدت على $\{u_3\}$ يؤدي إلى

$$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

أخيراً باستخدام v_3, v_2, v_1 كأعمدة نحصل على المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

التي تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية . (لتأكيد ذلك ، قد يرغب القارئ أن يتحقق من أن $P^t A P$ مصفوفة قطرية) .

نختم هذا القسم بتقرير خاصيتين هامتين للمصفوفات المتماثلة . نحدد البرهان .

نظرية ٨ :

(أ) المعادلة المميزة لمصفوفة ممتثلة A جميع جذورها حقيقية .

(ب) إذا كانت قيمة ذاتية λ لمصفوفة ممتثلة A مكرر k من المرات كجذر للمعادلة المميزة ، فإن الفراغ الذاتي المناظر للقيمة λ يكون له البعد k .

مثال (١٤) :

المعادلة المميزة للمصفوفة الممتثلة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

هي

$$(\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

لذلك فإن القيم الذاتية هي $\lambda = 4$ ، $\lambda = 1$ ، $\lambda = 2$ حيث تتكرر القيم $\lambda = 4$ ، $\lambda = 1$ مرتين وتحذف $\lambda = 2$ مرة واحدة . لذلك فيكون الفراغان الذاتيان المناظران للقيمتين $\lambda = 4$ ، $\lambda = 1$ ثنائيا البعد ويكون الفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$ أحادي البعد .

مادة اختيارية :

برهان نظرية ٧ : لتكن قيمتين ذاتيتين مختلفتين لمصفوفة ممتثلة A من النوع $n \times n$ ، وليكن

$$v_2 = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

هما المتجهان الذاتيان المناظران . نريد أن نثبت أن

$$\langle v_1, v_2 \rangle = v_1 v'_1 + v_2 v'_2 + \dots + v_n v'_n = 0$$

حيث أن $v_1^t v_2$ مصفوفة من النوع 1×1 لها $\langle v_1, v_2 \rangle$ كمعصر وحيد ، يمكننا أن نكمل البرهان بإثبات أن $v_1^t v_2 = 0$

حيث أن $v_1^t A v_2$ مصفوفة من النوع 1×1 ومن البدهي أن كل مصفوفة من النوع 1×1 تكون ممتثلة فإن

$$v_1^t A v_2 = (v_1^t A v_2)^t$$

$$= v_2^t A^t v_1 \quad (\text{من خاصية التحرير ، انظر قسم ٢ - ٣})$$

$$= v_2^t A v_1 \quad \text{حيث أن } A \text{ ممتثلة}$$

أيضاً

$$v_1^t A v_2 = v_1^t \lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1^t v_2$$

$$\begin{aligned} v_2^t A v_1 &= v_2^t \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_2^t v_1 \\ &= \lambda_1 (v_2^t v_1)^t = \lambda_1 v_1^t v_2 \end{aligned}$$

إذن

$$\lambda_1 v_1^t v_2 = \lambda_2 v_1^t v_2$$

أى

$$(\lambda_1 - \lambda_2) v_1^t v_2 = 0$$

حيث أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ينبع ذلك أن تكون $v_1^t v_2 = 0$

تجارب ٦ - ٢

١ - استخدم الجزء (ب) من نظرية (٨) لإيجاد أبعاد الفراغات الذاتية للمصفوفات المماثلة التالية :

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{23} & 0 & -\frac{24}{23} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{24}{23} & 0 & \frac{7}{23} \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(د)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{و})$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{هـ})$$

في التمارين من (٢) إلى (٩) أوجد مصفوفة P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية ، وعين $P^{-1}AP$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

- ٣

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- ٢

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$$

- ٥

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$$

- ٤

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- ٧

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ٦

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- ٩

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ٨

١٠- أوجد مصفوفة تحول عمودياً إلى الصورة القطرية المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

حيث $b \neq 0$.

١١- تسمى المصفوفتان A و B من النوع $n \times n$ متوافقتين عمودياً ، إذا وجدت مصفوفة عمودية P بحيث تكون $B = P^{-1}AP$.

أثبت أنه إذا كانت A متماثلة وكانت B متوافقتين عمودياً ، فإن B متماثلة .

١٢- برهن نظرية (٧) للمصفوفات المتماثلة من النوع 2×2 .

١٣- برهن نظرية (٨) للمصفوفات المتماثلة من النوع 2×2 .

٧- تطبيقات

٧ - ١ تطبيقات في المعادلات التفاضلية

توصف كثير من قوانين الفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء والاقتصاد بمصطلحات المعادلات التفاضلية ، أى ، المعادلات المتضمنة على دوال ومشتقاتها . الغرض من هذا القسم هو توضيح إحدى الطرق التى يطبق فيها الجبر الخطى لحل أنظمة معينة من المعادلات التفاضلية . مجال هذا القسم ضيق ، ولكنه قد يفيد فى إقناع القارئ أن للجبر الخطى تطبيقات واضحة .

تعتبر المعادلة التالية من أبسط المعادلات التفاضلية

$$y' = ay \quad (7.1)$$

حيث $y = f(x)$ دالة مجهولة يراد تعيينها ، $y' = dy/dx$ هى ومشتقاتها ، a ثابت مثل أغلب المعادلات التفاضلية ، للمعادلة (7.1) حلول لانهاية العدد ، وهى دوال على الصورة

$$y = ce^{ax} \quad (7.2)$$

حيث c ثابت اختياري . كل دالة على هذه الصورة حل للمعادلة $y' = ay$ حيث أن

$$y' = cae^{ax} = ay$$

وبالعكس كل حل للمعادلة $y' = ay$ يجب أن يكون دالة على الصورة ce^{ax} (انظر تمرين ٧) ، لهذا فإن (7.2) تصف كل حلول المعادلة $y' = ay$ إننا نسمى (7.2) الحل العام للمعادلة $y' = ay$. فى بعض الأحيان تنص المسألة الفيزيائية المنشئة لمعادلة تفاضلية على بعض الشروط الإضافية التى تسمح لنا أن نفرد حلاً خاصاً واحداً من الحل العام . على سبيل المثال ، إذا اقتضينا أن يكون حل المعادلة $y' = ay$ مستوفياً للشروط الإضافية

$$y(0) = 3 \quad (7.3)$$

بمعنى أن $y = 3$ عند $x = 0$ فبالتمويض عن هذه القيم فى المعادلة العامة $y = ce^{ax}$ نحصل على قيمة للثابت c ، وهى

$$3 = ce^0 = c$$

ولذلك فإن

$$y = 3e^{ax}$$

هى الحل الوحيد للمعادلة $y' = ay$ الذى يستوفى الشرط الإضافي . يسمى شرطاً ابتدائياً الشرط ، مثل (7.3) ، الذى يخصص قيمة الحل عند نقطة ومسألة حل معادلة تفاضلية تحت شرط ابتدائي تسمى مسألة قيمة - ابتدائية .

سنكسر اهتمامنا ، في هذا القسم ، لحل أنظمة لمعادلات تفاضلية على الصورة

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \quad (7.4)$$

حيث $y_1 = f(x_1)$ ، $y_2 = f_2(x_2)$ ، ... ، $y_n = f_n(x)$ دوال يراد تعيينها ، والمعاملات a_{ij} ثوابت . باستخدام المصفوفات يمكن كتابة (7.4) كما يلي .

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

أو بشكل أكثر إيجازاً

$$Y' = AY$$

مثال (١) :

(أ) أكتب النظام

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 \\ y_2' &= -2y_2 \\ y_3' &= 5y_3 \end{aligned}$$

في صورة مصفوفات .

(ب) حل النظام

(ج) أوجد حلاً للنظام يحقق الشروط الابتدائية ، $y_1(0) = 1$ ، $y_2(0) = 4$ ، $y_3(0) = -2$

الحل : (أ)

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

أي

$$Y' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} Y$$

أو بصيغة المصفوفات

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

أو بشكل أكثر إيجازاً

$$Y = PU$$

في هذا الترميز المعاملات p_{ij} ثوابت يراد تعيينها بحيث يكون النظام الجديد المتضمن للدوال المجهولة u_1, u_2, \dots, u_n مصفوفة معاملات قطرية. ستترك كثيرين للطالب ، أن يجرى عملية التفاضل على كل معادلة في (7.6) ويستنتج أن

$$Y' = PU'$$

إذا أجرينا الترميزين $Y' = PU'$ ، $Y = PU$ في النظام الأصل

$$Y' = AY$$

وإذا افترضنا أن P قابلة للعكاس ، فإننا نحصل على

$$PU' = A(PU)$$

$$U' = (P^{-1}AP)U \quad \text{أى}$$

$$U' = DU \quad \text{أى}$$

حيث $D = P^{-1}AP$. ويكون الآن اختيار P واضحاً ، فإذا أردنا لمصفوفة المعاملات D أن تكون قطرية ، فيجب أن نختار P لتكون مصفوفة تحول A إلى الصورة القطرية .

يقترح ماسبق الأسلوب التالي لحل نظام ما

$$Y' = AY$$

له مصفوفة معاملات A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية

خطوة (١) : أوجد مصفوفة P تحول A إلى الصورة القطرية

خطوة (٢) : أجر الترميز $Y' = PU'$ ، $Y = PU$ لتتحصل على « نظام قطري » جديد

$$U' = DU \quad \text{حيث } D = P^{-1}AP$$

خطوة (٣) : حل $U' = DU$

خطوة (٤) : : عين Y من المعادلة $Y = PU$

مثال (٢) :

(أ) حل

$$y_1' = y_1 + y_2$$

$$y_2' = 4y_1 - 2y_2$$

(ب) أوجد الحل الذى يحقق الشرطين الابتدائيين $y_1(0) = 1$ ، $y_2(0) = 6$ ،

الحل (أ) : مصفوفة المعاملات للنظام هى

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

وفقاً للمناقشة فى (٦ - ٢) ، تكون قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية بواسطة أى مصفوفة أعمدتها متجهات ذاتية غير مرتبطة خطياً للمصفوفة .

حيث أن

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

فتكون القيم الذاتية للمصفوفة هى $\lambda = 2$ ، $\lambda = -3$. بالتعريف يكون

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظراً للقيمة λ إذا وفقط إذا كان x حلاً غير صفرياً للمعادلة $(\lambda I - A)x = 0$ أى للنظام

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\lambda = 2$ هذا النظام يصبح

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لإجراء الحل يعطى

$$x_1 = t, \quad x_2 = t$$

لهذا فإن

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وإذن يكون

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 2$. يمكن للقارىء ، بالمثل ، أن يثبت أن

$$p_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

الأساس للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = -3$ وإذن

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تحويل A إلى الصورة القطرية ويكون

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

لذلك فيؤدى التحويل

$$Y' = PU' \quad \text{و} \quad Y = PU$$

إلى « النظام القطرى » الجديد

$$\begin{aligned} u_1' &= 2u_1 \\ u_2' &= -3u_2 \end{aligned} \quad \text{أى} \quad U' = DU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} U$$

من (7.2) يكون حل هذا النظام هو

$$U = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix} \quad \text{أى} \quad \begin{aligned} u_1 &= c_1 e^{2x} \\ u_2 &= c_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

ومن ثم تعطى المعادلة $Y = PU$ الحل بالنسبة إلى Y كما يلى

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{bmatrix}$$

أى

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ y_2 &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned} \quad (7.7)$$

(ب) إذا عوضنا من الشرط الابتدائى فى (7.7) فإننا نحصل على

$$c_1 - \frac{1}{4} c_2 = 1$$

$$c_1 + c_2 = 6$$

حل هذا النظام نحصل على

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 4$$

وإذن من (7.7) يكون الحل المستوفى للشرطين الابتدائين هو

$$y_1 = 2e^{2x} - e^{-3x}$$

$$y_2 = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$$

لقد افترضنا فى هذا القسم أن مصفوفة المعاملات للنظام $Y' = AY$ قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

إذا لم تكن الحالة كذلك ، يجب أن تستخدم طرق أخرى لحل النظام . تبحث هذه الطرق فى مراجع متقدمة أكثر من ذلك .

تمارين ٧ - ١

١ - (أ) حل النظام

$$y_1' = y_1 + 4y_2$$

$$y_2' = 2y_1 + 3y_2$$

(ب) أوجد الحل الذي يحقق الشرطين الابتدائيين $y_2(0) = 0$ ، $y_1(0) = 0$

٢ - (أ) حل النظام

$$y_1' = y_1 + 3y_2$$

$$y_2' = 4y_1 + 5y_2$$

(ب) أوجد الحل الذي يحقق الشرطين الابتدائيين $y_2(0) = 1$ ، $y_1(0) = 2$

٣ - (أ) حل النظام

$$y_1' = 4y_1 + y_3$$

$$y_2' = -2y_1 + y_2$$

$$y_3' = -2y_1 + y_3$$

(ب) أوجد الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية $y_1(0) = -1$ ، $y_2(0) = 1$ ، $y_3(0) = 0$

٤ - حل النظام

$$y_1' = 4y_1 + 2y_2 + 2y_3$$

$$y_2' = 2y_1 + 4y_2 + 2y_3$$

$$y_3' = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3$$

٥ - حل المعادلة التفاضلية $y'' - y' - 6y = 0$ - أرشاد : افترض أن $y_1 = y$ ، $y_2 = y'$ وأثبت أن

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y'' = y' + 6y = y_1' + 6y_1 = 6y_1 + y_2$$

٦ - حل المعادلة التفاضلية $y'' - 6y' + 11y = 0$ - أرشاد : افترض أن

$$y_1 = y$$
 ، $y_2 = y'$ ، $y_3 = y''$ ثم اثبت أن

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = 6y_1 - 11y_2 + 6y_3$$

٧ - برهن أن : كل حل للمعادلة $y' = ay$ يكون على الصورة $y = ce^{ax}$ (إرشاد : افترض أن

$$y = f(x) \text{ حل ، وأثبت أن } f(x)e^{-ax} \text{ ثابت} .$$

٨ - أثبت أنه إذا كانت A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية وكانت

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

تحقق $Y' = AY$ فتكون كل y_i تركيبة خطية من $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ القيم الذاتية للمصفوفة A .

٧ - ٢ تطبيقات في مسائل التقريب - متسلسلات فوريير

نهتم في كثير من التطبيقات بإيجاد أحسن تقريب ممكن في فترة ما لدالة f بواسطة دالة أخرى من نوع مخصص ما ، على سبيل المثال

(أ) أوجد أحسن تقريب ممكن على الفترة $[0, 1]$ للدالة e^x بواسطة كثيرة حدود على الصورة

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 .$$

(ب) أوجد أحسن تقريب ممكن على الفترة $[-1, 1]$ للدالة $\sin \pi x$ بواسطة دالة على الصورة

$$a_0 + a_1e^x + a_2e^{2x} + a_3e^{3x} .$$

(ج) أوجد أحسن تقريب ممكن على الفترة $[0, 2\pi]$ للدالة $|x|$ بواسطة دالة على الصورة

$$a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x .$$

لاحظ أن في كل من هذه الأمثلة أخذت دوال التقريب من فراغ جزئى للفراغ الاتجاهى $C[a, b]$ (الدوال المتصلة على $[a, b]$). كان الفراغ الجزئى في المثال الأول هو الفراغ الجزئى من $C[0, 1]$ المنشأ بواسطة $1, x, x^2$ ، وفي المثال الثانى كان هو الفراغ الجزئى من $C[-1, 1]$ المنشأ بواسطة $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}$ ، وفي المثال الثالث هو الفراغ الجزئى من $C[0, 2\pi]$ المنشأ بواسطة $1, \sin x, \sin 2x, \cos x, \cos 2x$ لذلك ينص كل من هذه الأمثلة على مسألة بالصورة التالية :

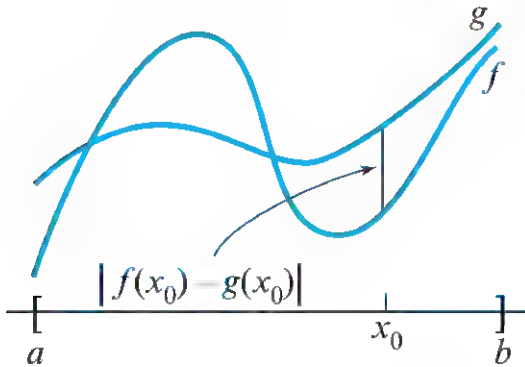
مسألة التقريب : أوجد أحسن تقريب ممكن على الفترة $[a, b]$ لدالة معطاة f باستخدام تقريبات فقط من فراغ جزئى مخصص W من $C[a, b]$.

لحل هذه المسألة يجب أن نجعل التعبير « أحسن تقريب ممكن على $[a, b]$ » أكثر دقة . من البدهى أن يكون أحسن تقريب على $[a, b]$ هو ذلك الذى ينتج أقل خطأ . ولكن ماذا نعنى بكلمة « خطأ » ؟ إذا كنا مهتمين فقط بتقريب الدالة $f(x)$ عند نقطة واحدة x_0 فإن الخطأ عند x_0 باستخدام تقريب ما $g(x)$ سيكون ببساطة هو

$$|f(x_0) - g(x_0)| = \text{الخطأ}$$

ويسمى في بعض الأحيان الانحراف بين f ، g عند x_0 (انظر شكل ٧ - ١) . إلا أننا مهتمون بالتقريب على فترة بأكملها $[a, b]$ ، وليس عند نقطة واحدة . نتيجة لذلك ، فى أحد أجزاء الفترة قد يكون لتقريب ما $g_1(x)$ انحرافات عن $f(x)$ أصغر من انحرافات تقريب ما $g_2(x)$ وفى جزء آخر من الفترة قد ينمكس الوضع . كيف يقرر الدارس ما هو أحسن تقريب شامل ؟ ما نريد ه هو طريقة ما لقياس الخطأ

الشامل عند استخدام تقريب $g(x)$. أحد مقاييس الخطأ الشامل نحصل عليه بأن نكامل الانحراف $|f(x) - g(x)|$ على الفترة بأكملها

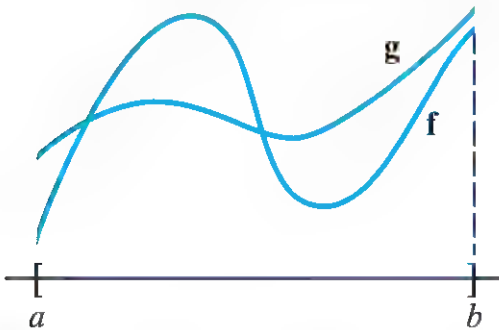


(شكل ٧ - ١)

أي أن

$$\text{error} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (7.8)$$

هندسياً ، تكون (7.8) هي المساحة بين الرسمين البيانيين للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ على الفترة $[a, b]$ (انظر شكل ٧ - ٢) ، فكلما كانت المساحة أكبر ، كلما كان الخطأ الشامل أكبر



(شكل ٧ - ٢)

في حين أن (7.8) طبيعية ومقبولة هندسياً ، إلا أن ظهور علامة المقياس يجعل الحسابات مزعجة بدرجة كافية حتى أن معظم الرياضيين والعلماء يفضلون بصفة عامة القياس البديل التالي للخطأ ، و المسمى بمتوسط مربع الخطأ

$$\text{متوسط مربع الخطأ} = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

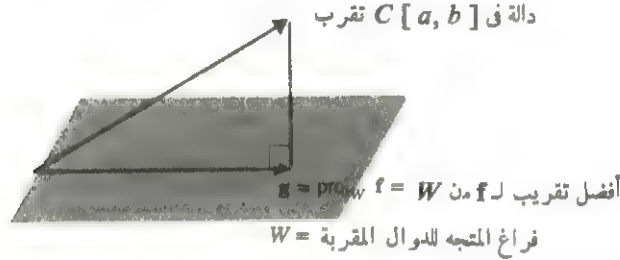
يمتاز متوسط مربع الخطأ بالمزية الاضافية التي تسمح لنا بالتقدم لتطبيق نظرية فراغات الضرب الداخلي في مسائل التقريب . نرى كيفية ذلك ، اعتبر الضرب الداخلي

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (7.9)$$

على الفراغ الاتجاهي $C[a, b]$. بهذا الضرب الاتجاهي نحصل على

$$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

وتقرر هذه الصيغة أن متوسط مربع الخطأ الناتج من تقريب f بواسطة g على $[a, b]$ هو مربع المسافة بين f, g عندما ينظر إلى هاتين الدالتين كتجهين في $C[a, b]$ مع الضرب الداخلي (7.9). لذلك فإن التقريب g من فراغ جزئي W للفراغ $C[a, b]$ يصغر متوسط مربع الخطأ إلى الحد الأدنى إذاً فقط إذا كان هذا التقريب يصغر $\|f - g\|^2$ إلى الحد الأدنى ، أو بصورة مكافئة ، إذا فقط إذا كان يصغر $\|f - g\|$ باختصار فإن التقريب g في W الذي يصغر متوسط مربع الخطأ إلى الحد الأدنى يكون هو المتجه g في W الأقرب إلى f باستخدام الضرب الداخلي (7.9). ولكننا نعلم ماهو المتجه g من قبل ، أنه المسقط العمودي للمتجه f على الفراغ الجزئي W (انظر نظرية ٢٣ في قسم ٤ - ٩ ، وشكل ٧ - ٣). بإيجاز لدينا النتيجة التالية .



(شكل ٧ - ٣)

حل مسألة المربعات الصغرى : إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ وكان W فراغاً جزئياً منتهى البعد للفراغ $C[a, b]$ ، فإن الدالة g في W التي تصغر متوسط مربع الخطأ

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

إلى الحد الأدنى تكون $g = \text{proj}_W f$ ، المسقط العمودي للدالة f على W بالنسبة إلى الضرب الداخلي (7.9). تسمى الدالة $g = \text{proj}_W f$ بتقريب المربعات الصغرى من W للدالة f .

متسلسلة فوريير :

تسمى أى دالة على الصورة

$$f(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx + d_1 \sin x + d_2 \sin 2x + \cdots + d_n \sin nx \quad (7.10)$$

بكثيرة حدود مثلثية ، إذا لم يكن c_n, d_n كلاهما مساو للصفر ، فيقال إن $f(x)$ ذات رتبة n

مثال (٣) :

$$t(x) = 2 + \cos x - 3 \cos 2x + 7 \sin 4x$$

كثيرة حدود مثلثية بثوابت

$$c_0 = 2, c_1 = 1, c_2 = -3, d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0, d_4 = 7$$

ورتبة $t(x)$ هي 4 .

واضح من (7.10) أن كثيرات الحدود ذات الرتبة n أو أقل ، تكون هي التركيبات الخطية المختلفة والممكنة من

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx \quad (7.11)$$

لذلك فإن كثيرات الحدود المثلثية ذات الرتبة n أو أقل تشكل فراغاً جزئياً W للفراغ الاتجاهى للدوال المتصلة وبالتحديد الفراغ الجزئى المنشأ بالدوال ذات العدد $2n+1$ المدرجة في (7.11) . يمكن إثبات أن هذه الدوال غير مرتبطة خطياً ، وبالتالي تشكل أساساً للفراغ W .

دعنا نعتبر مسألة تقريب دالة متصلة $f(x)$ على الفترة $[0, 2\pi]$ بواسطة كثيرة حدوده مثلثية من رتبة n أو أقل . كما لاحظنا من قبل أن تقريب المربعات الصغرى للدالة f من W هو المسقط العمودى للدالة f على W . لإيجاد هذا المسقط العمودى ، يجب أن نجد أساساً عيارياً متعامداً g_0, g_1, \dots, g_{2n} للفراغ W ، وبعده يمكن حساب المسقط العمودى على W من الصيغة

$$\text{proj}_W f = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \langle f, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f, g_{2n} \rangle g_{2n} \quad (7.12)$$

(أنظر نظرية ٢٠ بالقسم ٤ - ٩) . يمكن الحصول على أساس عيارى متعامد للفراغ W بتطبيق عملية جرام - شميدت على الأساس (7.11) باستخدام الضرب الداخلى

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(x)v(x) dx$$

يؤدى هذا (أنظر تمرين ٦) إلى الأساس العيارى المتعامد

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, g_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots, g_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \\ g_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, g_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (7.13)$$

إذا اصطلمحنا على الكتابة

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle f, g_0 \rangle, a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_1 \rangle, \dots, a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_n \rangle \\ b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{n+1} \rangle, \dots, b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{2n} \rangle$$

فإنه بالتعويض من (7.13) في (7.12) نحصل على

$$\text{proj}_W f = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx] + [b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx]$$

حيث

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle f, g_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx$$

:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f, g_{2n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

باختصار

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

تسمى الأعداد $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ معاملات فوريير * للدالة f .

مثال (4) :

أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة $f(x) = x$ على $[0, 2\pi]$ بواسطة .

(أ) كثيرة حدود مثلثية من رتبة 2 أو أقل

(ب) كثيرة حدود مثلثية من رتبة n أو أقل

الحل :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$$

(*) جين بابتيست جوزيف فوريير (١٧٦٨ - ١٨٣٠) عالم رياضيات وفيزياء فرنسي. اكتشف فوريير متسلسلة فوريير والأفكار المتعلقة بها عندما كان يعمل في مسائل انتشار الحرارة يعتبر هذا الاكتشاف واحدا من أكثر الاكتشافات تأثيرا على تاريخ الرياضيات ، وهو حجر الزاوية لكثير من مجالات البحث الرياضى وأداة أساسية في كثير من العلوم الهندسية .

قضى فوريير وهو أحد السياسيين البارزين أثناء الثورة الفرنسية ، بعض الوقت في الحبس بسبب دفاعه عن الكثيرين من الضحايا خلال فترة الإرهاب ، بعد ذلك أصبح أحد أصدقاء نابليون وكان يلقب بكلا اللقبين « برون » و « كونت » .

بالنسبة إلى $k = 1, 2, \dots$ يعطى التكامل بالتجزئ (تحقق من ذلك)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx \, dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, dx = -\frac{2}{k} \quad (7.14)$$

تقريب المربعات الصغرى للدالة x على $[0, 2\pi]$ بواسطة كثيرة حدود مثلثية من رتبة 2 أو أقل هو

$$x \simeq \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$$

وإذن من (7.14) يكون التقريب هو

$$x \simeq \pi - 2 \sin x - \sin 2x$$

(ب) تقريب المربعات الصغرى للدالة x على $[0, 2\pi]$ بواسطة كثيرة حدود مثلثية من رتبة n

أو أقل هو

$$x \simeq \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx] + [b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx]$$

أو من (7.14) هو

$$x \simeq \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n} \right)$$

من الطبيعي أن نتوقع أن متوسط مربع الخطأ سيتضاءل بزيادة عدد الحدود في تقريب المربعات الصغرى

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

يمكن إثبات أن متوسط مربع الخطأ يقترب من الصفر عندما $n \rightarrow +\infty$ ويرمز لهذا بكتابة

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

يسمى الطرف الأيمن لهذه المعادلة بمسلسلة فورييه للدالة f . لكل هذه المتسلسلات أهمية بالغة في الهندسة والعلوم، والرياضيات.

تمارين ٧ - ٢

١ - أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة $f(x) = 1 + x$ على الفترة $[0, 2\pi]$ بواسطة

(أ) كثيرة حدود مثلثية من رتبة 2 أو أقل

(ب) كثيرة حدود مثلثية من رتبة n أو أقل

٢ - أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 2\pi]$ بواسطة

(أ) كثيرة حدود مثلثية من رتبة 3 أو أقل

(ب) كثيرة حدود مثلثية من رتبة n أو أقل.

- ٣ - (أ) أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة x على الفترة $[0, 1]$ بواسطة دالة على الصورة $a + be^x$ (ب) أوجد متوسط مربع الخطأ في التقريب .
- ٤ - (أ) أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة e^x على الفترة $[0, 1]$ بواسطة كثيرة حدود على الصورة $a_0 + a_1 x$ (ب) أوجد متوسط مربع الخطأ في التقريب .
- ٥ - (أ) أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة $\sin \pi x$ على الفترة $[-1, 1]$ بواسطة كثيرة حدود على الصورة $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (ب) أوجد متوسط مربع الخطأ في التقريب .
- ٦ - استخدم عملية جرام - شميدت للحصول على الأساس العياري المتعامد (7.13) من الأساس (7.11).
- ٧ - إجر التكاملات الموجودة في (7.14) .
- ٨ - أوجد متسلسلة فوريير للدالة $f(x) = \pi - x$

٧ - ٣ الصيغ التربيعية - تطبيق في القطوع المخروطية

في هذا القسم ، نطبق نتائجنا عن تحويلات الإحداثيات المتعامدة في دراسة معادلات الدرجة الثانية . والصيغ التربيعية والقطوع المخروطية . تظهر الصيغ التربيعية في أنواع مختلفة من المسائل الهامة المتعلقة بمجالات متباينة مثل الذبذبات والنظرية النسبية والهندسة والإحصاء .

تسمى معادلة من الدرجة الثانية في x ، y أى معادلة على الصورة .

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (7.15)$$

حيث تكون a ، b ، c ، d ، e ، f أعدادا حقيقية ويكون أحد الأعداد a ، b ، c على الأقل غير مساو للصفر . والتعبير

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

يسمى الصيغة التربيعية المرافقة .

مثال (١٥) :

في معادلة الدرجة الثانية

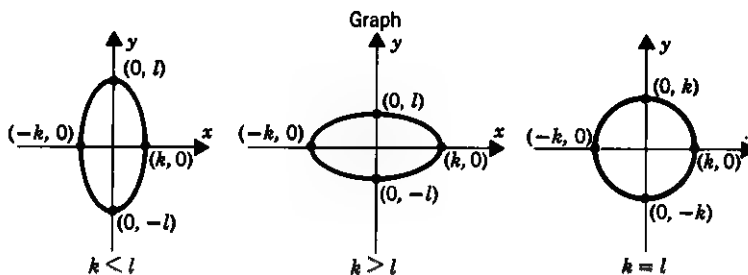
$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$$

تكون الثوابت البيئة في (7.15) هي

$$a = 3 \quad b = \frac{5}{2} \quad c = -7 \quad d = 2 \quad e = 0 \quad f = 7$$

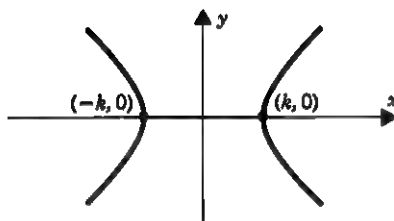
$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1; k, l > 0$$

(قطع ناقص أو دائرة)



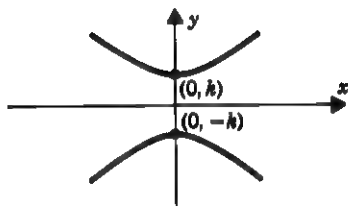
$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1; k, l > 0$$

(قطع زائد)



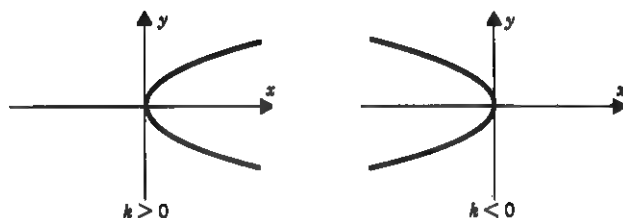
$$\frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{l^2} = 1; k, l > 0$$

(قطع زائد)



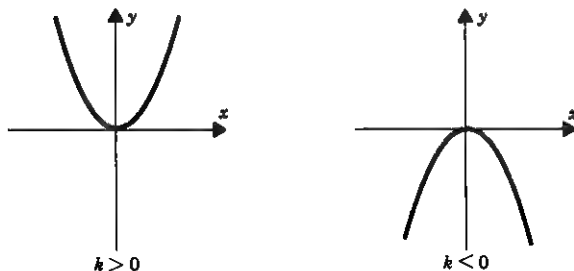
$$y^2 = kx$$

(قطع متكافئ)



$$x^2 = ky$$

(قطع متكافئ)



(شكل ٤ - ٤)

مثال (١٦) :

الصيغة التربيعية المرافقة

$$3x^2 + 5xy - 7y^2$$

$$4x^2 - 5y^2$$

$$xy$$

معادلة الدرجة الثانية

$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$$

$$4x^2 - 5y^2 + 8y + 9 = 0$$

$$xy + y = 0$$

الرسوم البيانية للمعادلات من الدرجة الثانية في x ، y تسمى قطعاً مخروطية . وأهم القطوع المخروطية هي القطوع الناقصة والدوائر والقطع الزائدة والقطع المتكافئة ، وتسمى هذه القطوع بالقطع المخروطية غير المنحلة تسمى باقي القطوع بالقطع المخروطية المنحلة وتتضمن نقاطاً منفردة وأزواجاً من الخطوط المستقيمة (أنظر تمرين ١٣) .

يقال أن القطع المخروطي غير المنحل في الوضع القياسي بالنسبة إلى محاور الإحداثيات إذا أمكن التعبير عن معادته بإحدى الصيغ المعطاة في شكل ٧ - ٤ .

مثال (١٧) :

المعادلة

$$l = 3, k = 2 \quad \text{حيث} \quad \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1 \quad \text{على الصورة} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

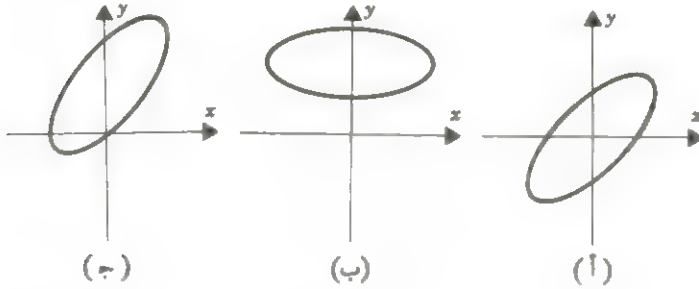
ولذلك فيكون رسمها البياني قطعاً ناقصاً في الوضع القياسي والذي يقطع محوري x عند $(-2, 0)$ ، $(2, 0)$ ويقطع محور y عند $(0, -3)$ ، $(0, 3)$.

يمكن كتابة المعادلة $x^2 - 8y^2 = -16$ بالصورة $x^2/16 - y^2/2 = 1$ والتي تكون على الصورة $x^2/l^2 - y^2/k^2 = 1$ ، حيث $l=4$ ، $k=\sqrt{2}$ ، ولذلك فيكون رسمها البياني قطعاً زائداً في الوضع القياسي والذي يقطع محور y عند $(0, -\sqrt{2})$ ، $(0, \sqrt{2})$.

المعادلة $5x^2 + 2y = 0$ يمكن كتابتها بمثابة $x^2 = -\frac{2}{5}y$ والتي تكون على الصورة $lx^2 = ky^2$ مع $k = -\frac{2}{5}$. حيث أن $k < 0$ ، فإن الرسم البياني للمعادلة يكون قطعاً مكافئاً في الوضع القياسي مفتوحاً إلى تحت .

لاحظ أن أى قطع مخروطي في الوضع القياسي ليس له حد xy (يسمى حد ضرب تقاطعي) في معادته ، يدل وجود حد xy في معادلة القطع المخروطي غير المنحل على أن القطع المخروطي قد تم تدويره عن الوضع القياسي (أنظر شكل ٧ - أ) . لاحظ أيضاً ، أن أى قطع مخروطي في الوضع القياسي ليس له الحدان

x^2 ، x مما أو الحدان y^2 ، y معا عادة ما يدل وجود أى من هذين الزوجين في معادلة القطع المخروطى غير المنحل على أن القطع المخروطى قد تم نقله من الوضع القياسى (أنظر شكل ٧ - ٥ ب) .



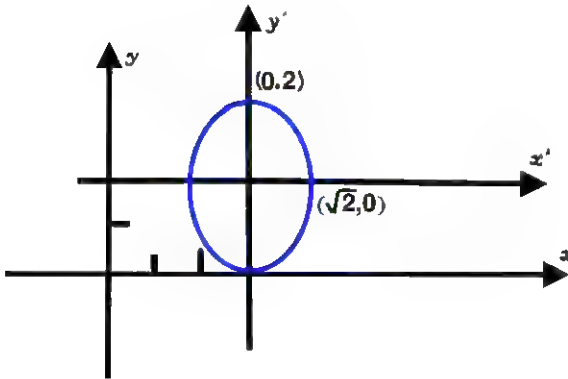
(شكل ٧ - ٥) (أ) دوران (ب) انتقال (ج) دوران مع انتقال

إحدى وسائل التعرف على الرسم البياني لقطع مخروطى غير منحل وليس في الوضع القياسى تتكون من تدوير ونقل محاور الاحداثيات xy لنحصل على نظام إحداثيات $x'y'$ الذى يكون القطع المخروطى بالنسبة له في الوضع القياسى . حالما يتم عمل ذلك يصبح معادلة القطع المخروطى في النظام $x'y'$ على إحدى الصور المعطاة في شكل ٧ - ٤ ومن ثم يمكن التعرف على الرسم البياني بسهولة .

مثال (١٨) :

حيث أن معادلة الدرجة الثانية

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$$



(شكل ٧ - ٦)

نحوى الحدود x^2 ، x ، y^2 ، y ولكن لا نحوى حد ضرب تقاطعى ، فيكون رسمها البياني قطعا مخروطيا منقولا من الوضع القياسى ، ولكن ليس مدارا . يمكن إعادة هذا القطع إلى الوضع القياسى بنقل محاور الإحداثيات . لعمل ذلك تجمع أولا حدود x وحدود y أى نكتب

$$(2x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0$$

أو

$$2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

باكمال المربع * على كل من العبارتين داخل الأقواس ، نحصل على

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

أى

$$2(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad (7.16)$$

إذا نقلنا محاور الإحداثيات باستخدام معادلات الانتقال

$$x' = x - 3 \quad y' = y - 2$$

(أنظر مثال ٣ فى قسم ٣ - ١) ، فإن (7.16) تصبح

$$2x'^2 + y'^2 = 4$$

أى

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص فى الوضع القياسى فى النظام $x'y'$. هذا القطع الناقص مرسوم رسما تخطيطيا فى شكل ٧ - ٦ .

نتدبر الآن كيفية التعرف على القطوع المخروطية التى تم تدويرها عن الوضع القياسى. بالنسبة لبقية هذا الكتاب ، سنتبع غرضا معتادا بمخلف الأقواس من كل المصفوفات من النوع 1×1 . فيمكن لرمز 8 أن يدل إما على العدد 8 أو على المصفوفة من النوع 1×1 والى عنصرها هو العدد 8 سيكون من الممكن دائما من النص معرفة أيهما المعنى بذلك . بهذا التعرف ، يمكن كتابة (7.15) بصيغة المصفوفات كما يلى

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

أو

$$x'Ax + Kx + f = 0 \quad (7.17)$$

حيث

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$$

• لا كمال مربع على عبارة فى الصورة $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ لتصل على

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

هذا الاصطلاح تكون الصيغة التربيعية المرافقة للمعادلة (7.17) هي

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x}$$

تسمى المصفوفة المائلة A بمصفوفة الصيغة التربيعية $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$.

مثال (١٩) :

مصفوفات الصيغ التربيعية

$$8x^2 - 4y^2 \quad \text{و} \quad 3x^2 + 5xy + 7y^2$$

هي

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix}$$

اعتبر قطعاً مخروطياً بالمعادلة

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0 \quad (7.18)$$

سنبين الآن أنه من الممكن تدوير محاور الأحداثيات x, y بحيث لا يكون لمعادلة القطع المخروطى في نظام الأحداثيات x, y حد ضرب تقاطعى

خطوة (١) أوجد مصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية .

خطوة (٢) أبدل عمودى P ، إذا لزم ذلك ، لجعل $\det(P) = 1$. يؤكد هذا أن تحويل الأحداثيات العمودى

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \quad \text{أى أن} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

يكون دوراناً (أنظر قسم ٤ - ١٠) .

خطوة (٣) للحصول على معادلة C في النظام x, y عوض من (7.19) في (7.18) يؤدي هذا إلى

$$(P\mathbf{x}')'A(P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + f = 0$$

أو

$$\mathbf{x}'(P'AP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + f = 0 \quad (7.20)$$

حيث أن P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية

$$P'AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

حيث λ_1 ، λ_2 هما القيمتان الذاتيتان المصفوفة A . لذلك فيمكن كتابة (7.20) كما يلي

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

أو

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

(حيث $d' = dp_{11} + ep_{21}$ ، $e' = dp_{12} + ep_{22}$) . ليس لهذه المعادلة حد ضرب تقاطعي .
تلخص النظرية التالية هذا النقاش .

نظرية ٩ : (نظرية المحاور الأساسية بالنسبة إلى \mathbb{R}^2) . لتكن

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

معادلة قطع مخروطي C ، ولتكن

$$x'Ax = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

الصيغة التربيعية المرافقة . محاور الأحداثيات يمكن تدويرها بحيث يكون لمعادلة C في نظام الأحداثيات الجديد $x'y'$ الصيغة

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

حيث λ_1 ، λ_2 هما القيمتان الذاتيتان المصفوفة A . يمكن إنجاز الدوران بواسطة الصويغ

$$x = Px'$$

حيث P تحول A عموديا إلى الصورة القطرية وحيث $\det(P) = 1$.

مثال (٢٠) :

صف القطع المخروطي C الذي معادله هي $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

الحل : صيغة المصفوفات لهذه المعادلة هي

$$x'Ax - 36 = 0 \quad (7.21)$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة للمصفوفة A هي

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

وإذن القيمتان الذاتيتان المصفوفة A هما $\lambda = 9$ ، $\lambda = 4$.

المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda = 4$ هي الحلول غير الصفرية للنظام

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يجل هذا النظام نحصل على

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أساس للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda=4$. نجعل هذا المتجه عياريا للحصول على أساس عيارى متعامد لهذا الفراغ الذاتي ، فنحصل على

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

بالمثل يكون

$$v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

أساساً عياريا متعامدا للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 9$

وإذن فالمصفوفة

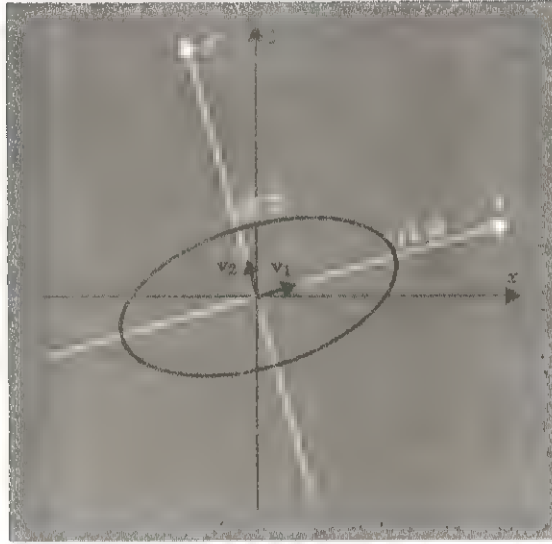
$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

تحول A محوديا إلى الصورة القطرية . بالإضافة إلى ذلك ، فإن $\det (P) = 1$ وعليه فإن التحويل المموى للاحداثيات

$$x = Px' \quad (7.22)$$

يكون دورانا . بالتعويض من (7.22) في (7.21) نحصل على

$$(Px')^T A (Px') - 36 = 0$$



(شكل ٧ - ٧)

أو

$$(\mathbf{x}')^t (P^t A P) \mathbf{x}' - 36 = 0$$

وحيث أن

$$P^t A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

فهذه المعادلة يمكن كتابتها

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

أو

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

هذه المعادلة يمكن أيضاً كتابتها

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

وهذه معادلة القطع الناقص المرسوم رسمياً تخطيطياً في شكل ٧ - ٧ .

مثال (٢١) :

صف القطع المخروطي C الذي معادلته هي

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$$

الحل : صيغة المصفوفات لهذه المعادلة هي

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + 4 = 0 \quad (7.23)$$

حيث

$$K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

كما تبين في مثال ٢٠

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

نحول A عموديا إلى الصورة القطرية . تعويض $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ في (7.23) نحصل على

$$(P\mathbf{x}')'A(P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + 4 = 0$$

أو

$$(\mathbf{x}')'(P'AP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + 4 = 0 \quad (7.24)$$

حيث أن

$$KP = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad , \quad P'AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = [-8, -36]$$

فيمكن كتابة (7.24) بالصورة

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \quad (7.25)$$

لإعادة القطع المخروطي إلى الوضع القياسي، يجب أن ننقل المحاور x' و y' . باتباع طريقة مثال ١٨ نعيد كتابة (7.25) بالصورة

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = -4$$

إكمال المربعين يؤدي إلى

$$4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36$$

أو

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36 \quad (7.26)$$

إذا نقلنا محاور الأحداثيات بواسطة معادلات الانتقال

$$x'' = x' - 1 \quad y'' = y' - 2$$

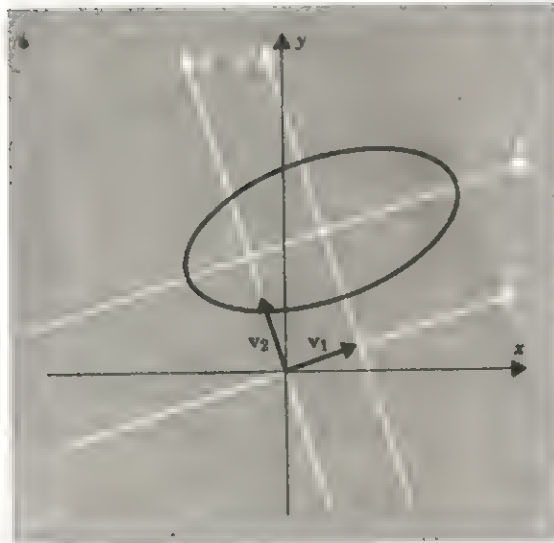
فإن (7.26) تصبح على الصورة

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36$$

أو

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

وهذه معادلة القطع الناقص المرسوم رسماً تخطيطياً في شكل ٧ - ٨ .



(شكل ٧ - ٨)

تمارين ٧ - ٣

١ - أوجد الصيغ التربيعية المرافقة لمعادلات الدرجة الثانية التالية .

$$2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0 \quad (أ)$$

$$x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0 \quad (ب)$$

$$5xy = 8 \quad (ج)$$

$$4x^2 - 2y^2 = 7 \quad (د)$$

$$y^2 + 7x - 8y - 5 = 0 \quad (هـ)$$

٢ - أوجد مصفوفات الصيغ التربيعية في تمرين ١ .

٣ - عبر عن كل معادلة من الدرجة الثانية في تمرين ١ بصيغة المصفوفات $x^T A x + K x + f = 0$.

٤ - كل من القطوع المخروطية التالية

(أ) $2x^2 + 5y^2 = 20$	(ب) $4x^2 + 9y^2 = 1$
(ج) $x^2 - y^2 - 8 = 0$	(د) $4y^2 - 5x^2 = 20$
(هـ) $x^2 + y^2 - 25 = 0$	(و) $7y^2 - 2x = 0$
(ز) $-x^2 = 2y$	(ح) $3x - 11y^2 = 0$
(ط) $y - x^2 = 0$	(ى) $x^2 - 3 = -y^2$

٥ - في كل جزء سيضع انتقال ما القطع المخروطى في الوضع القياسى . اذكر اسم القطع المخروطى واعط معادلته بالنسبة إلى نظام الإحداثيات المنقول .

(أ) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$	(هـ) $2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y = -41$
(ب) $x^2 - 16y^2 + 8x + 128y = 256$	(و) $x^2 + 10x + 7y = -32$
(ج) $y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$	
(د) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$	

٦ - القطوع المخروطية غير المنحلة التالية مدارة عن الوضع القياسى . في كل جزء أدر محاور الإحداثيات لتزيل الحد xy . أذكر اسم القطع المخروطى واعط معادلته بالنسبة إلى نظام الإحداثيات المدار .

(أ) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$	(ب) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$
(ج) $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$	(د) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

في التمارين من ٧ إلى ١٢ انقل وأدر محاور الإحداثيات ، إذا لزم ذلك ، لتضع القطع المخروطى في الوضع القياسى . اذكر اسم القطع ، واعط معادلته في نظام الإحداثيات النهاى .

٧ - $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y = 5$

٨ - $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$

٩ - $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$

١٠ - $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$

١١ - $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$

١٢ - $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

١٣ - يمكن لمنحنى معادلة من الدرجة الثانية في x ، y في حالات معينة ، أن يكون إما نقطة أو خط مستقيم أو زوجاً من الخطوط المستقيمة . وهذه تسمى بالقطوع المخروطية المنحلة . ويمكن أيضاً أن لا تتحقق المعادلة بأى قيم حقيقية للمتغيرين x ، y في مثل هذه الحالات لا يكون للمعادلة أى شكل

بيان ، ويقال أنها تمثل قطعاً مخروطياً تخلياً المعادلات التالية تمثل قطعاً منحنياً أو تخلياً . كلما كان ممكناً ، ارسم شكلاً تخلياً .

$$\begin{array}{ll} x^2 + 3y^2 + 7 = 0 & \text{(ب)} \\ x^2 - y^2 = 0 & \text{(أ)} \\ x^2 - 2xy + y^2 = 0 & \text{(د)} \\ 8x^2 + 7y^2 = 0 & \text{(ج)} \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = -5 & \text{(و)} \\ 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0 & \text{(هـ)} \end{array}$$

٧ - ٤ الصيغ التربيعية - تطبيق على سطوح الدرجة الثانية

في هذا القسم نعلم طرائق القسم السابق إلى معادلات الدرجة الثانية في ثلاثة متغيرات .
أية معادلة على الصورة

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (7.27)$$

حيث a, b, c, \dots, f ليست كلها أصفاراً ، تسمى معادلة من الدرجة الثانية في x, y, z ويسمى التعبير

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

بالصيغة التربيعية المرافقة .

يمكن كتابة (7.27) بصيغة المصفوفات

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

أى

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + j = 0$$

حيث

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$$

تسمى المصفوفة المائلة A مصفوفة الصيغة التربيعية

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

مثال (٧٢) :

الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة الدرجة الثانية

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz + 7x + 2y + 3z - 7 = 0$$

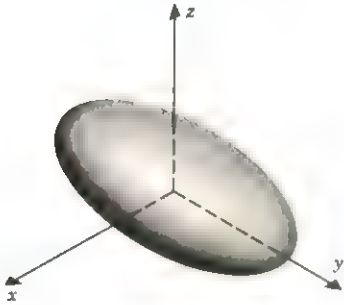
هى

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz$$

ومصنوفة هذه الصيغة التربيعية هي

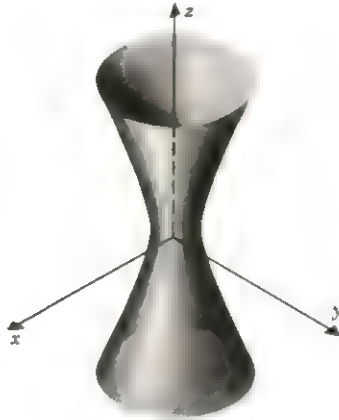
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & -4 \\ \frac{3}{2} & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

رسومات المعادلة التربيعية في x, y, z تسمى سطوح الدرجة الثانية . نعطى الآن بمض الأمثلة



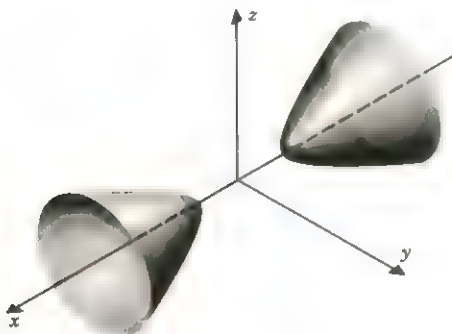
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$$

سطح ناقص



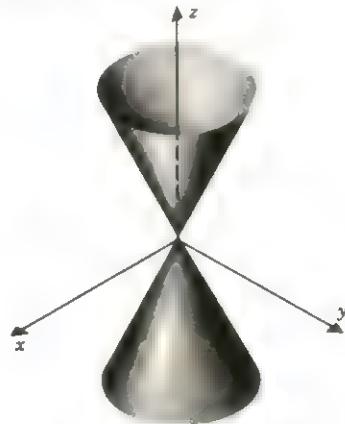
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$$

سطح زائدي ذو طية واحدة



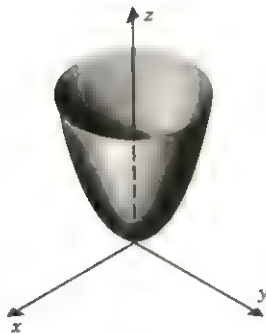
$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$$

سطح زائدي ذو طيتين



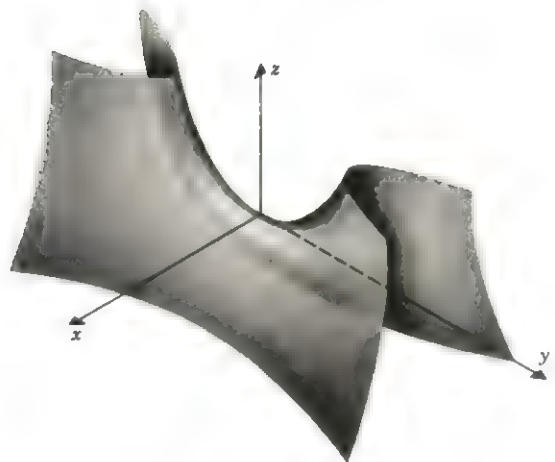
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 0$$

(شكل ٧-٩) مخروط ناقص



$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - z = 0$$

سطح مكافئ ناقص



$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} + z = 0$$

(شكل ٧ - ٩) سطح مكافئ زائدي

سطح الدرجة الثانية معادلته في إحدى الصور المعطاة في شكل ٧ - ٩ يقال أنه في الوضع القياسي بالنسبة إلى محاور الأحداثيات . يدل ظهور واحد أو أكثر من حدود الضرب xy ، xz ، yz في معادلة سطح من الدرجة الثانية غير منحل على أن السطح قد أدير عن الوضع القياسي ، وظهور كلا الحدين x^2 ، xy أو الحدين y^2 ، yz أو الحدين z^2 ، z يدل عادة على أن السطح قد نقل من الوضع القياسي .

مثال (٧٣) :

صف سطح الدرجة الثانية الذي معادلته هي

$$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$$

الحل : إعادة ترتيب الحدود تعطى

$$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 = -304$$

إكمال المربعات يعطى

$$4(x^2 - 4x + 4) + 36(y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = -304 + 16 + 324$$

أى

$$4(x - 2)^2 + 36(y - 3)^2 - 9z^2 = 36$$

أى

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + (y - 3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

نقل المحاور بواسطة معادلات الانتقال

$$x' = x - 2 \quad y' = y - 3 \quad z' = z$$

يعطى

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 - \frac{z'^2}{4} = 1$$

وهى معادلة سطح زائدى ذو طية واحدة .

توضح النتيجة التالية أنه من الممكن دائماً حذف حدود الضرب من معادلة الدرجة الثانية بدوران محاور الأحداثيات .

نظرية ١٠ : (نظرية المحاور الأساسية في الفراغ R^3) : لتكن

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (7.28)$$

هى معادلة سطح من الدرجة الثانية Q ولتكن

$$x'Ax = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

هى الصيغة التربيعية المرافقة . يمكن دوران محاور الأحداثيات بحيث أن معادلة السطح Q فى نظام الأحداثيات $x'y'z'$ تكون على الصورة

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0 \quad (7.29)$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ القيم الذاتية للمصفوفة A . يمكن إنجاز الدوران بواسطة التعميم

$$x = Px'$$

حيث P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية و $\det(P) = 1$.

هذه النظرية تقترح الطريقة التالية لإزالة حدود الضرب من معادلة الدرجة الثانية فى x, y, z .

خطوة (١) : أوجد مصفوفة P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية .

خطوة (٢) : أبدل عمودين من P إذا لزم ذلك ، لجعل $\det(P) = 1$ يؤكد هذا أن تحويل

الأحداثيات العمودى

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

يكون دوراناً .

خطوة (٣) : عوض (7.30) فى (7.29)

برهان أن المعادلة الجديدة تكون على الصورة (7.29) يماثل البرهان المعطى فى القسم السابق ، ويترك هذا كتمرين .

مثال (٢٤) :

صف سطح الدرجة الثانية الذى معادلته

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

الحل : صيغة المصفوفات لمعادلة الدرجة الثانية السابقة هي

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} - 3 = 0 \quad (7.31)$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

كما تبين فى مثال (١٣) بقسم ٦ - ٣ ، القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 2$ ، $\lambda = 8$ وتكون A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية بواسطة المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

حيث متجهها العمودين الأولين فى P هما متجهان ذاتيان مناظران للقيمة $\lambda = 2$ ومتجه العمود الثالث هو متجه ذاتى مناظر للقيمة $\lambda = 8$.

حيث أن $\det(P) = 1$ (حقق ذلك) ، فإن تحويل الأحداثيات العمودى

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \text{ that is, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

يكون دورانياً .

نعميض (7.32) فى (7.31) يعطى

$$(P\mathbf{x}')'A(P\mathbf{x}') - 3 = 0$$

أو بصورة مكافئة

$$(\mathbf{x}')'(P^tAP)\mathbf{x}' - 3 = 0 \quad (7.33)$$

حيث أن

$$P^tAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

فإن (7.33) تصبح

$$[x' \ y' \ z'] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

أى

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{x'^2}{3/2} + \frac{y'^2}{3/2} + \frac{z'^2}{3/8} = 1$$

وهى معادلة سطح ناقص .

تمارين ٧ - ٤

١ - أوجد الصيغ التربيعية المرافقة لمعادلات الدرجة الثانية التالية :

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3 \quad (أ)$$

$$3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4 \quad (ب)$$

$$xy + xz + yz = 1 \quad (ج)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 7 \quad (د)$$

$$3z^2 + 3xz - 14y + 9 = 0 \quad (هـ)$$

$$2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0 \quad (و)$$

٢ - أوجد مصفوفات الصيغ التربيعية في تمرين (١) .

٣ - عبر عن كل معادلة من معادلات الدرجة الثانية في تمرين (١) بصيغة المصفوفات

$$Ax + kx + f = 0$$

٤ - اذكر أسماء سطوح الدرجة الثانية التالية :

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0 \quad (أ)$$

$$2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 18 \quad (ب)$$

$$6x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 6 = 0 \quad (ج)$$

$$9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0 \quad (د)$$

$$16x^2 + y^2 = 16z \quad (هـ)$$

$$7x^2 - 3y^2 + z = 0 \quad (و)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad (ز)$$

٥ - عين في كل جزء معادلات الانتقال الى متضع سطح الدرجة الثانية في الوضع القياسي. اذكر اسم السطح :

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0 \quad (أ)$$

$$6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z = -7 \quad (ب)$$

$$3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0 \quad (ج)$$

$$4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z = 544 \quad (د)$$

$$x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z - 15 = 0 \quad (هـ)$$

$$7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 135 = 0 \quad (و)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11 \quad (ز)$$

٦ - أوجد في كل جزء دورانياً $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ يزيل حدود الضرب . اذكر اسم السطح واعط معادله في النظام $x' y' z'$.

$$2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 7xz + 150 = 0 \quad (\text{أ})$$

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0 \quad (\text{ج})$$

$$2xy + z = 0 \quad (\text{د})$$

في التمارين من ٧ إلى ١٠ أنقل وأدر محاور الأحداثيات لتضع سطح الدرجة الثانية في الوضع القياسي - اذكر اسم السطح واعط معادله في نظام الأحداثيات النهائي .

$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9 \quad - \quad ٧$$

$$7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24 \quad - \quad ٨$$

$$2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0 \quad - \quad ٩$$

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0 \quad - \quad ١٠$$

١١ - برهن نظرية (١٠) .

٨- مقدمة في الطرق العددية للجبر الخطي

٨ - ١ طريقة جاوس للحذف بالتركيز المحوري

سنناقش في هذا القسم بعض الجوانب العملية لحل أنظمة من n من المعادلات في n من المجهول . عملياً ، غالباً ماتحل أنظمة المعادلات الخطية على الحاسبات الإلكترونية العددية . حيث أن الحاسبات الإلكترونية محدودة بعدد أماكن الكسور العشرية التي يمكن أن تحملها ، فإنها تقرب أو تبتر معظم المقادير العددية على سبيل المثال ، فالحاسب الإلكتروني المصمم لتخزين ثمانية أماكن للكسور العشرية قد يسجل 2/3 أما بمشابة 66666667 . (مقرب) أو 66666666 . (مبتور) . في كل حالة ، ينتج خطأ سنسميه خطأ التقريب .

الاعتبارات العملية الأساسية في حل أنظمة المعادلات الخطية على الحاسبات الإلكترونية العددية هي :

١ - التصغير إلى الحد الأدنى عدم الدقة الناتجة من خطأ التقريب الرقى .

٢ - التصغير إلى الحد الأدنى الوقت (وبالتالي التكلفة) اللازم للحصول على الحل .

باستثناء الحالات التي يكون فيها لمصفوفة المعاملات تركيب خاص (على سبيل المثال ، عدد ضخم من الأصفر) ، فعادة ماتكون طريقة جاوس للحذف هي الطريقة المثل لحل النظام . نقدم في هذا القسم تعديلاً بطريقة جاوس في الحد مصمم لتصغير تأثير خطأ التقريب الرقى إلى الحد الأدنى .

تنجز معظم حسابات الحاسب الإلكتروني باستخدام أعداد النقاط العائمة العيادية . هذا يعنى الأعداد المعبر عنها بالصورة *

$$\pm M \times 10^k \quad (8.1)$$

حيث k عدد صحيح و M كسر يحقق

$$.1 \leq M < 1$$

الكسر M يسمى القيمة العشرية للمدد .

(*) تبدل معظم الحاسبات الاللكترونية اعدادالكسور العشرية (للاساس 10) الى اعداد كسور ثنائية (للاساس 2) مع ذلك ، للتبسيط ، سوف ن فكر بدلالة الكسور العشرية .

مسال (١) :

نمبر عن الأعداد التالية في صورة النقطة العائمة العيارية :

$$73 = .73 \times 10^2$$

$$-.000152 = -.152 \times 10^{-3}$$

$$1,579 = .1579 \times 10^4$$

$$-1/4 = -.25 \times 10^0$$

أعداد الأماكن العشرية في القيمة العشرية للعدد والحجم المسموح به للأس k في (8.1) تعتمد على الحاسب الإلكتروني المستخدم . على سبيل المثال ، فالحاسب IBM 360 يخزن مايكافه سبعة أرقام في القيمة العشرية للعدد ويسمح للعدد 10^k بمدى من 10^{-75} إلى 10^{75} . الحاسب الذي يستخدم n مكاناً عشرياً في القيمة العشرية للعدد يقال إنه يقرب الأعداد إلى n وقلم معنوي .

مسال (٢) :

الأعداد التالية مقربة إلى ثلاثة أرقام معنوية :

العدد	صورة النقطة العائمة العيارية	القيمة المقربة
7/3	$.233 \times 10^1$	2.33
1,758	$.176 \times 10^4$	1,760
.0000092143	$.921 \times 10^{-5}$.00000921
-.12	$-.120 \times 10^0$	-.12
13.850	$.138 \times 10^2$	13.8
-.08495	$-.850 \times 10^{-1}$	-.085

(إذا حدث ، كما في الحالتين الأخيرتين ، وكان الجزء الذي يحذف في عملية التقريب هو بالضبط نصف الوحدة ، فإننا سنختار اصطلاح التقريب بحيث يكون آخر رقم متبقى زوجياً . عملياً ، تختلف معاملة هذه الحالة من حاسب لآخر) .

سنقدم الآن تعديلاً لطريقة جاوس للحذف تسمى التركيز المحوري أو طريقة جاوس للحذف باستخدام محاور الحذف ؛ تصمم هذه الطريقة لتصغير التأثير المتراكم لخطأ التقريب الرقفي في حل n من المعادلات الخطية في n من المجهول وذلك للحد الأدنى . نفترض أن النظام له حل وحيد . ونحن نصف كل خطوة فإننا سنوضح الفكرة باستخدام المصفوفة الممتدة للنظام :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$$

خطوة (١) : أوجد في العمود أقصى اليسار عنصراً يكون له أكبر قيمة مطلقة .

يسمى هذا العنصر عنصراً محورياً .

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

عنصر محوري

عمود أقصى اليسار

خطوة (٢) : أجز عملية تبديل صفوف ، إذا لزم ذلك ، لنقل العنصر المحوري إلى قيمة العمود

تم تبديل الصفين
الأول والثاني
للمصفوفة السابقة

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

خطوة (٣) : إذا كان العنصر المحوري هو a اضرب صف القيمة في $1/a$

تم ضرب الصف
الأول للمصفوفة
السابقة في $1/6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

خطوة (٤) : أضف مضاعفات مناسبة لصف القيمة إلى الصفوف التي تحته بحيث أن جميع العناصر تحت
قمة العمود المحدد في خطوة (١) تصبح أصفاراً .

تم طرح ثلاثة أمثال
الصف الأول في
المصفوفة السابقة
من الصفين الثاني
والثالث

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

خطوة (٥) : غط صف القيمة في المصفوفة وابدأ مرة أخرى بخطوة (١) ، مطبقاً ذلك على المصفوفة
الجزئية المتبقية . استمر في هذا الطريق حتى تكون المصفوفة بأكملها في الصورة الصفية المميزة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

عنصر محوري

عمود غير صفري أقصى اليسار

في المصفوفة الجزئية

تم تبديل الصفين
الأول والثاني
للمصفوفة الجزئية

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

تم ضرب الصف
الأول للمصفوفة
الجزئية في $-1/5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

تمت اضافة الصف
الاول للمصفوفة
الجزئية الى الصف
الثانى

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

تمت تغطية الصف
الاول للمصفوفة
الجزئية وعدنا مرة
اخرى للخطوة ١

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

هناك أقصى اليسار في المصفوفة
الجزئية الجديدة
عنصر محوري

تم ضرب الصف
الاول للمصفوفة
الجزئية الجديدة
في $-1/2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة بأكملها الآن في الصورة الصفية المميزة .

خطوة (٦) : حل نظام المعادلات المناظر بالتعويض الخلفي .

نظام المعادلات المناظر هو

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 3$$

الحل بالتعويض الخلفي يعطى

$$x_3 = 3 \quad x_2 = -1 \quad x_1 = 2$$

حيث أن الحسابات السابقة حسابات مضبوطة فهذا المثال لا يوضح مدى تأثير التركيز المحوري على اختزال خطأ التقريب الرقمي يوضح المثال التالي ذلك .

مثال (٣) :

حل النظام التالي بواسطة طريقة جاوس لمحو المحوري . بعد كل خطوة حساب قرب النتيجة إلى ثلاثة أرقام معنوية .

$$.00044x_1 + .0003x_2 - .0001x_3 = .00046$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 1.5 \quad (8.2)$$

$$3x_1 - 9.2x_2 - .5x_3 = -8.2$$

الحل : (باستخدام الحذف المحوري) : المصفوفة الممتدة هي

$$\begin{bmatrix} .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

لنقل العنصر المحورى إلى قة العمود الأول ، نبدل الصفين الأول والثانى ، وهذا يعطى

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

قسمة كل عنصر فى الصف الأول على 4 تعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

طرح .00044 - مثل الصف الأول من الثانى ، ثلاثة أمثال الصف الأول من الثالث يعطى (بعد التقريب إلى ثلاثة أرقام معنوية) ،

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & .000190 & -.00021 & .000295 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \end{bmatrix}$$

تبدیل الصفين الثانى والثالث يعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \\ 0 & .000190 & -.00021 & .000295 \end{bmatrix}$$

قسمة كل عنصر فى الصف الثانى على 9.95 - تعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & -.000190 & -.00021 & .000295 \end{bmatrix}$$

إضافة .000190 - مثل الصف الثانى إلى الثالث يعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & 0 & -.000234 & .000117 \end{bmatrix}$$

قسمة كل عنصر فى الصف الثالث على 000234 - تعطى الصورة الصغرى المميزة

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & 0 & 1 & -.5 \end{bmatrix}$$

نظام المعادلات المناظر هو

$$x_1 + .25x_2 + .25x_3 = .375$$

$$x_2 + .126x_3 = .937$$

$$x_3 = -.5$$

الحل بالتعويض الخلفي يعطى (لثلاثة أرقام معنوية)

$$x_1 = .250 \quad x_2 = 1.00 \quad x_3 = -.500 \quad (8.3)$$

إذا حل النظام (8.2) بطريقة جاوس العادية للحذف (غير المحورية) وقربت كل خطوة حساب إلى ثلاثة أرقام معنوية ، نحصل على (حذف التفاصيل)

$$x_1 = .245 \quad x_2 = 1.01 \quad x_3 = -.492 \quad (8.4)$$

مقارنة (8.3) و (8.4) مع الحل المضبوط

$$x_1 = \frac{1}{4} \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

توضح أن استخدام الحذف المحورى يؤدي إلى نتائج أكثر دقة .

بالرغم من حقيقة أن التركيز المحورى يمكن أن يختزل التأثير المتراكم لخطأ التقريب الرقمى ، فتوجد أنظمة معينة للمعادلات ، تسمى أنظمة معتلة الشرط والتي تكون شديدة الحساسية لدرجة أن حتى الأخطاء الطفيفة فى المعاملات يمكن أن تنتج عدم دقة خطير فى الحل . على سبيل المثال ، اعتبر النظام

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -3 \\ x_1 + 1.016x_2 &= 5 \end{aligned} \quad (8.5)$$

إذا افترضنا أن هذا النظام سيحل على حاسب يقرب إلى ثلاثة أرقام معنوية ، فالحاسب سيخزن هذا النظام هكذا

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -3 \\ x_1 + 1.02x_2 &= 5 \end{aligned} \quad (8.6)$$

الحل المضبوط للمعاملات (8.5) هو $x_1 = -503$ ، $x_2 = 500$ والحل المضبوط للمعادلات (8.6) هو $x_1 = -403$ ، $x_2 = 400$ أى أن خطأ التقريب الرقمى البسيط 0.004 فى أحد معاملات (8.5) يسبب خطأ جسيماً فى الحل .

لا يمكن حمل سوى القليل من الناحية الحساسة لتجنب الأخطاء الضخمة فى حلول أنظمة المعادلات الخطية معتلة الشرط . رغم ذلك ، فى مسائل الطبيعة ، حيث تظهر أنظمة معتلة الشرط يكون من الممكن أحياناً أن نعيد صياغة المسألة التى تظهر النظام لتجنب اعتلال الشرط . بعض المراجع المشار إليها فى نهاية هذا الباب تشرح كيف نتعرف على الأنظمة المعتلة الشرط .

تمارين ٨ - ١

١ - عبر عن التالى بصورة النقط العائمة العيارية .

$$(أ) \quad 14/5 \quad (ب) \quad 3,452 \quad (ج) \quad .000003879$$

$$(د) \quad -.135 \quad (هـ) \quad 17.921 \quad (و) \quad -.0863$$

سنفرض أن العناصر القطرية a_{11} ، a_{22} ، ... ، a_{nn} جميعها غير صفرية وأن للنظام حلا واحدا .
الطريقة الأولى التي سنناقشها تسمى بتكرار جاكوبي أو بطريقة الإزاحات في آن واحد . لكي تبدأ ،
أعد كتابة النظام (8.7) بحل المعادلة الأولى بالنسبة إلى x_1 بدلالة بقية المجاهيل ، وحل المعادلة الثانية بالنسبة
إلى x_2 بدلالة بقية المجاهيل ، وحل المعادلة الثالثة بالنسبة إلى x_3 بدلالة بقية المجاهيل وهم جرا . هذا يعطى

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{aligned} \quad (8.8)$$

فغلا النظام

$$\begin{aligned} 20x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18 \end{aligned} \quad (8.9)$$

يجب أن يعاد كتابته على الصورة

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{17}{20} - \frac{1}{20}x_2 + \frac{1}{20}x_3 \\ x_2 &= -\frac{13}{10} + \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_3 \\ x_3 &= \frac{18}{10} + \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2 \end{aligned} \quad \text{أى} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= .850 - .05x_2 + .05x_3 \\ x_2 &= -1.3 + .1x_1 + .1x_3 \\ x_3 &= 1.8 + .1x_1 - .1x_2 \end{aligned}$$

إذا كان هناك تقريبا معروفا لحل النظام (8.7) ، وروضنا بهذه القيم المقربة في الطرف الأيمن من
(8.8) فتكون عادة قيم x_1 ، x_2 ، ... ، x_n الناتجة في الطرف الأيسر تقريبا أفضل للحل . هذه
الملاحظة هي مفتاح طريقة جاكوبي .

حل النظام (8.7) بتكرار جاكوبي أو وجد تقريبا أوليا للحل . عندما لا يوجد اختيار جيد استخدم
 $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$

عوض بهذا التقريب الأولى في الطرف الأيمن من (8.8) واستخدم قيم x_1 ، x_2 ، ... الناتجة في
الطرف الأيسر كتقريب جديد للحل .

فلا حل (8.9) بطريقة جاكوبي ، علينا أن نموض بالتقريب الأول $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ في الطرف الأيمن من (8.10) ثم نحسب التقريب الجديد

$$x_1 = .850 \quad x_2 = -1.3 \quad x_3 = 1.8 \quad (8.11)$$

لتحسين التقريب علينا أن نكرر عملية التمييز . فلا في حل (8.9) علينا أن نموض بالتقريب (8.11) في الطرف الأيمن من (8.10) للحصول على التقريب التالي

$$x_1 = .850 - .05(-1.3) + .05(1.8) = 1.005$$

$$x_2 = -1.3 + .1(.850) + .1(1.8) = -1.035$$

$$x_3 = 1.8 + .1(.850) - .1(-1.3) = 2.0105$$

هذه الطريقة يمكننا تكوين متتابعة من التقريبات التي تقترب ، تحت شروط معينة ، أكثر فأكثر إلى الحل المضبوط للنظام . في شكل ٨ - ١ نلخصنا النتائج التي حصلنا عليها بحل النظام (8.9) بتكرار جاكوبي . قربت جميع الحسابات إلى خمسة أرقام مئوية في نهاية التمييز السادس (يسمى بالتكرار السادس) فإن الحل المضبوط $x_1 = 1$ ، $x_2 = -1$ ، $x_3 = 2$ يصبح معلوماً بدقة إلى خمسة أرقام مئوية .

	التقريب السادس	التقريب الخامس	التقريب الرابع	التقريب الثالث	التقريب الثاني	التقريب الأول	التقريب الابتدائي
x_1	1.0000	.99997	1.0001	1.0025	1.005	.850	0
x_2	-1.0000	-.99999	-.99935	-.9980	-1.035	-1.3	0
x_3	2.0000	1.9999	2.0000	2.004	2.015	1.8	0

(شكل ٨ - ١)

سنناقش الآن تعديلاً طفيفاً لطريقة جاكوبي تختزل عادة عدد التكرارات المطلوبة للحصول على درجة دقة مطاة . تسمى هذه الطريقة بتكرار جاوس - سيدل أو بطريقة الإزاحات المتتالية .

في كل تكرار بطريقة جاكوبي نحصل على التقريب الجديد بالتمييز السابق في الطرف الأيمن من (8.8) ثم الحل للحصول على قيم جديدة للمجهول x_1 ، x_2 ، ... هذه القيم الجديدة لا تحسب في آن واحد ، نحصل على x_1 أولاً من المعادلة الأولى ، ثم نحصل على x_2 من المعادلة الثانية ، ثم على x_3 وهكذا . حيث أن قيم x الجديدة عادة تكون أقرب إلى الحل المضبوط ، فإن هذا يقترح أننا نحصل على دقة أكثر باستعمال قيم x الجديدة بمجرد معرفتها . للتوضيح اعتبر النظام (8.9) . في التكرار الأول لطريقة جاكوبي ، عوضنا بالتقريب الأول $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ في كل معادلة من الطرف الأيمن في (8.10) للحصول على التقريب الجديد

$$x_1 = .850 \quad x_2 = -1.3 \quad x_3 = 1.8 \quad (8.12)$$

في التكرار الأول في طريقة جارس - سيدل فإن التقريب الجديد يجب أن يحسب كما يلي . عوض بالتقريب الأول $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ في الطرف الأيمن من المعادلة الأولى في (8.10) يعطى هذا القيمة التقديرية الجديدة $x_1 = 0.850$

استخدم هذه القيمة الجديدة للمجهول x_1 مباشرة في التمييز

$$x_1 = 0.850 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0$$

في الطرف الأيمن من المعادلة الثانية في (8.10) . يعطى هذا القيمة التقديرية الجديدة $x_2 = -1.215$. استخدم هذه القيمة الجديدة للمجهول x_2 مباشرة في التمييز

$$x_1 = 0.850 \quad x_2 = -1.215 \quad x_3 = 0$$

في الطرف الأيمن من المعادلة الثالثة في (8.10) يعطى هذا القيمة التقديرية الجديدة $x_3 = 2.0065$. وعليه في نهاية التكرار الأول بطريقة جارس - سيدل فإن التقريب الجديد هو

$$x_1 = 0.850 \quad x_2 = -1.215 \quad x_3 = 2.0065 \quad (8.13)$$

ويجب أن تجرى الحسابات للتكرار الثاني كما يلي .

التمييز من (8.13) في الطرف الأيمن من المعادلة الأولى من (8.10) والتقريب إلى خمسة أرقام معنوية يعطى

$$x_1 = 0.850 - 0.05(-1.215) + 0.05(2.0065) = 1.0111$$

التمييز

$$x_1 = 1.0111 \quad x_2 = -1.215 \quad x_3 = 2.0065$$

في الطرف الأيمن من المعادلة الثانية من (8.10) والتقريب إلى خمسة أرقام معنوية يعطى

$$x_2 = -1.3 + 0.1(1.0111) + 0.1(2.0065) = -0.99824$$

التمييز

$$x_1 = 1.0111 \quad x_2 = -0.99824 \quad x_3 = 2.0065$$

في الطرف الأيمن من المعادلة الثالثة من (8.10) والتقريب إلى خمسة أرقام معنوية يعطى

$$x_3 = 1.8 + 0.1(1.0111) - 0.1(-0.99824) = 2.0009$$

عليه في نهاية التكرار الثاني بطريقة جارس - سيدل يكون التقريب الجديد هو

$$x_1 = 1.0111 \quad x_2 = -0.99824 \quad x_3 = 2.0009$$

في شكل ٨ - ٢ نحصن النتائج التي حصلنا عليها باستخدام أربعة تكرارات بطريقة جاوس سيدل حل (8.9) وقد قربت جميع الأعداد إلى خمسة أرقام معنوية .

بمقارنة الجدولين في شكل ٨ - ١ ، ٨ - ٢ نجد أن طريقة جاوس - سيدل تعطي الحل للنظام (8.9) (بدقة إلى خمسة أرقام معنوية) في أربعة تكرارات بينما نحتاج إلى ستة تكرارات للحصول على نفس الدقة بطريقة جاكوبي .

(شكل ٨ - ٢)

	التقريب الرابع	التقريب الثالث	التقريب الثاني	التقريب الأول	التقريب الابتدائي
x_1	1.0000	.99995	1.0111	.850	0
x_2	-1.0000	-.99992	-.99824	-1.215	0
x_3	2.0000	2.0000	2.0009	2.0065	0

ويجب ألا نستخلص من هذا لمثال أن طريقة جاوس - سيدل دائماً أفضل من طريقة جاكوبي . بالرغم من أنه قد يبدو الأمر غريباً إلا أنه توجد فعلاً أمثلة بحيث تكون طريقة جاكوبي أفضل من طريقة جاوس - سيدل .

طريقتنا جاوس - سيدل وجاكوبي لا تصلحان دائماً . في بعض الحالات قد تفشل إحداها أو كلاهما في إعطاء تقريب جيد للحل بغض النظر عن عدد التكرارات المنجزة . في مثل هذه الحالات تسمى التقريبات تباعده . إذا كان إنجاز عدد كبير كبراً كافياً من التكرارات ، يمكن الحصول على الحل إلى أي درجة نريدها من الدقة فتسمى التقريبات تقاربية .

نختتم هذا القسم بمناقشة شرط يضمن أن التقريبات الناتجة من الطريقتين تقاربية .

المصفوفة المربعة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

تسمى سائدة لطريقاً بانتظام إذا كانت القيمة المطلقة لكل عنصر قطري أكبر من مجموع القيم المطلقة للعناصر الباقية في نفس الصف ؛

$$\begin{array}{l}
 |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}| \\
 |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}| \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 |a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{nn-1}|
 \end{array}
 \quad \text{أى أن}$$

مثال (٤) :

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ 5 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

غير سائد قطريا ، حيث أنه في الصف الثانى $|1|$ ليس بأكبر من $|6| + |-4|$ ، وفى الصف الثالث $|-4|$ ليس بأكبر من $|5| + |12|$.

إذا بدلنا الصفين الثانى والثالث ، فإن المصفوفة الناتجة

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 5 & 12 & -4 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

تكون سائدة قطريا بانتظام إذ أن

$$\begin{array}{l}
 |7| > |-2| + |3| \\
 |12| > |5| + |-4| \\
 |-6| > |4| + |1|
 \end{array}$$

يمكن إثبات أنه إذا كانت المصفوفة A سائدة قطريا بانتظام فإن تقريبات جاوس - سيدل و جاكوبى لحل $Ax = b$ تكون تقاربية .

تمارين ٨ - ٢

في التمارين ١ - ٤ حل الأنظمة بتكرار جاكوبى . ابدأ بالتقريب $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$. استخدم أربعة تكرارات وقرب الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية . قارن نتائجك بالحلول المضبوطة .

$$\begin{array}{l}
 3x_1 - x_2 = 5 \quad - \quad ٢ \\
 2x_1 + 3x_2 = -4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x_1 + x_2 = 7 \quad - \quad ١ \\
 x_1 - 2x_2 = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 .4x_1 + .1x_2 = .2 \\
 .3x_1 + .7x_2 = 1.4 \quad - \quad ٤
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 5x_1 - 2x_2 = -13 \\
 x_1 + 7x_2 = -10 \quad - \quad ٣
 \end{array}$$

في التمارين ٥ - ٨ حل الأنظمة بتكرار جاوس - سيدل . ابدأ بالتقريب $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$. استخدم ثلاثة تكرارات وقرب الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية . قارن نتائجك بالحلول المضبوطة .

- ٥ - حل النظام في تمرين ١ .
٦ - حل النظام في تمرين ٢ .
٧ - حل النظام في تمرين ٣ .
٨ - حل النظام في تمرين ٤ .

في التمارين ٩ - ١٠ حل النظام بتكرار جاكوبي . ابدأ بالتقريب $x_3 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_1 = 0$.
استخدم ثلاثة تكرارات وقرب الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية . قارن نتائجك بالحلول المبسطة .

$$\begin{array}{rcl} 20x_1 - x_2 + x_3 = 20 & 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 & \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 11 & x_1 + 10x_2 - x_3 = \frac{1}{2} & - 9 \\ x_1 + x_2 - 20x_3 = -18 & 2x_1 + x_2 + 10x_3 = -9 & \end{array}$$

في التمرينين ١١ - ١٢ حل النظام بتكرار جاكوبي - سيدل . ابدأ بالتقريب $x_2 = 0$ ، $x_1 = 0$ ، $x_3 = 0$.
استخدم ثلاثة تكرارات وقرب الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية . قارن نتائجك بالحلول المبسطة .

- ١١ - حل النظام في تمرين ٩ .
١٢ - حل النظام في تمرين ١٠ .
١٣ - أي من المصفوفات التالية تكون سائدة قطريا بانتظام ؟

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{(ب)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(أ)} \\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} & \text{(أ)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{(د)} \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)} \end{array}$$

١٤ - اعتبر النظام

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array}$$

- (أ) اثبت أن التقريبات التي نحصل عليها بتكرارات جاكوبي تباعدية .
(ب) هل مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

سائدة قطريا بانتظام ؟

١٥ - اثبت أنه إذا كان واحد أو أكثر من العناصر القطرية $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ في (8.7) صفرا فن الممكن أن نبدل المعادلات ونعيد ترقيم المجاهيل بحيث تكون العناصر القطرية في النظام الناتج جميعها غير صفرية .

٨ - ٣ تقريب القيم الذاتية بطريقة القوى

يمكن إيجاد القيم الذاتية لمصفوفة بحل معادلتها المميزة . وتكون هذه الطريقة في المسائل العملية غير مجدية . وعلاوة على هذا ففي كثير من المسائل الطبيعية يكون المطلوب هو القيمة الذاتية ذات أكبر قيمة مطلقة فقط . في هذا القسم نناقش طريقة لتقريب هذه القيمة الذاتية ومتجه ذاتي مناظر لها . وسناقش في القسم التالي التقريب لبقية القيم الذاتية والمتجهات الذاتية .

تعريف : تسمى قيمة ذاتية لمصفوفة A بالقيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A إذا كانت قيمتها المطلقة أكبر من القيمة المطلقة لكل من القيم الذاتية الباقية . أى متجه ذاتي مناظر للقيمة الذاتية السائدة يسمى بمتجه ذاتي سائد للمصفوفة A .

مثال (٥) :

إذا كان للمصفوفة A من النوع 4×4 القيم الذاتية

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2 \quad \lambda_4 = 2$$

فإن $\lambda_1 = -4$ هي القيمة الذاتية السائدة إذ أن

$$|-4| > |2| \quad \text{و} \quad |-4| > |3| \quad \text{و} \quad |-4| > |-2|$$

مثال (٦) :

ليس لمصفوفة A من النوع 3×3 قيمها الذاتية

$$\lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = -7 \quad \lambda_3 = 2$$

قيمة ذاتية سائدة .

اعتبر أن A مصفوفة من النوع $n \times n$ قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ولها قيمة ذاتية سائدة سنثبت في نهاية هذا القسم أنه إذا كان x_0 متجها اختياريا غير صفري في R^n ، فإن المتجه

$$A^p x_0 \quad (8.14)$$

يكون عادة تقريبا جيدا لمتجه ذاتي سائد للمصفوفة A عندما يكون الأس p كبيرا ويوضح المثال التالى هذه الفكرة .

مثال (٧) :

كما بينا فى مثال ٢ بالباب السادس فإن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

لها القيمتان الذاتيتان $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = 1$.

الفضاء الذاتى المناظر للقيمة الذاتية السائدة $\lambda_1 = 2$ هو فضاء الحل للنظام

$$(2I - A)x = 0$$

أى

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام يعطى $x_1 = -2t$ ، $x_2 = t$ لهذا فإن المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda_1 = 2$ هي المتجهات غير الصفريّة التى على الصورة

$$x = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

سنوضح الآن طريقة لاستخدام (8.14) فى تقدير متجه ذاتي سائد للمصفوفة A لكى نبدأ نأخذ اختياريا

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تكرار ضرب x_0 بالمصفوفة A يعطى

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2x_0 = A(Ax_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3x_0 = A(A^2x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -13 \end{bmatrix} \approx 13 \begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4x_0 = A(A^3x_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ -29 \end{bmatrix} \approx 29 \begin{bmatrix} 2.10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 \mathbf{x}_0 = A(A^4 \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 \\ -29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ -61 \end{bmatrix} \approx 61 \begin{bmatrix} 2.05 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 \mathbf{x}_0 = A(A^5 \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 125 \\ -61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 253 \\ -125 \end{bmatrix} \approx 125 \begin{bmatrix} 2.02 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^7 \mathbf{x}_0 = A(A^6 \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 253 \\ -125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix} \approx 253 \begin{bmatrix} 2.01 \\ -1 \end{bmatrix}$$

واضح من هذه الحسابات أن نواتج الضرب تقترب أكثر فأكثر من مضاعفات قياسية للمتجه

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وهو المتجه الذاتي السائد للمصفوفة A الذى نحصل عليه بوضع $\lambda = -1$ فى (8.15). حيث أن المضاعف القياسى لمتجه ذاتى سائد هو أيضاً متجه ذاتى سائد فإن الحسابات السابقة تنتج تقريبات أفضل فأفضل لمتجه ذاتى سائد للمصفوفة A .

سنوضح الآن كيف نقرب القيمة الذاتية السائدة متى عرفنا تقريبا لمتجه ذاتى سائد. لتكن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A و \mathbf{x} متجهها ذاتيا مناظرا. إذا كان $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ يرمز إلى الضرب الداخلى الأقليدى، فإن

$$\frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \lambda$$

وعليه إذا كان \mathbf{x} تقريبا لمتجه ذاتى سائد فيمكن تقريب القيمة الذاتية السائدة λ_1 بواسطة

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (8.16)$$

تسمى النسبة فى (8.16) بمخرج قسمة رايلى.*

مثال (٨) :

حصلنا فى مثال ٧ على

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix}$$

(*) جون ويليام ستروت رايلى (١٨٤٢ - ١٩١٩) - فيزيائى بريطانى . منح رايلى جائزة نوبل فى الفيزياء عام ١٩٠٤ لدوره فى اكتشاف غاز الأرجون عام ١٨٩٤ . سخط أبحاثه تقريبا جميع أفرع الفيزياء بما فى ذلك الصوت ، نظرية الموجات ، الضوء ، الرؤيا اللونية، الأليكتروديناميكا، الأليكترومغناطيسية، تشتت الضوء ، اللزوجة ، التصوير .

كتقريب لمتجه ذاتي سائد . وإذن

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1021 \\ -509 \end{bmatrix}$$

بالتعويض في (8.16) نحصل على

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \bar{x}, A\bar{x} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \frac{(509)(1021) + (-253)(-509)}{(509)(509) + (-253)(-253)} \approx 2.007$$

وهو تقريب جيد ، نسبياً ، للقيمة الذاتية السائدة $\lambda_1 = 2$.

الطريقة الموضحة في مثال (٧)، (٨) لتقريب المتجهات الذاتية والقيم الذاتية السائدة تسمى عادة بطريقة القوى أو بطريقة التكرار .

كما هو واضح من مثال (٧) . فإن طريقة القوى تنشئ عادة متجهات ذات مركبات كبيرة إلى درجة غير مناسبة لتلاني هذه المشكلة فإننا عادة « نعدل » المتجه الذاتي المقرب في كل خطوة بحيث تقع مركباته بين 1+ و 1- ويمكننا عمل هذا بضرب المتجه الذاتي المقرب في مقلوب المركبة التي لها أكبر قيمة مطلقة .

للتوضيح ، في الخطوة الأولى في مثال ٧ ، كان التقريب للمتجه الذاتي السائد هو

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المركبة التي لها أكبر قيمة مطلقة هي 5 لهذا فإن المتجه الذاتي المعدل بتصغير مركباته هو

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix}$$

سنلخص الآن خطوات طريقة القوى مع التصغير .

الخطوة صفر . خذ متجهاً اختيارياً غير صفري x_0 .

الخطوة ١ - احسب Ax_0 وصغر مركباته للحصول على التقريب الأول لمتجه ذاتي سائد سمه x_1 .

الخطوة ٢ - احسب Ax_1 وصغر مركباته للحصول على التقريب الثاني x_2 .

الخطوة ٣ - احسب Ax_2 وصغر مركباته للحصول على التقريب الثالث x_3 .

بالاستمرار على هذا المنوال نحصل على متتابة x_0, x_1, x_2, \dots من التقريبات الأفضل فالأفضل لمتجه ذاتي سائد .

مثال (٩) :

استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب متجه ذاتي سائد والقيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A في

مثال (٧) .

الحل : نأخذ اختياريًا

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كتقريب ابتدائي . ضرب \mathbf{x}_0 بالمصفوفة A ثم تصغير مركبته يعطى

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix}$$

ضرب \mathbf{x}_1 بالمصفوفة A ثم تصغير مركبته يعطى

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{2.6} \begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.385 \end{bmatrix}$$

من نسبة رايلي يكون التقدير الأول للقيمة الذاتية السائدة هو

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_1 \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} = \frac{(1)(2.6) + (-.2)(-1)}{(1)(1) + (-.2)(-.2)} = 2.692$$

ضرب \mathbf{x}_2 بالمصفوفة A ثم تصغير مركبته يعطى

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -.385 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{2.23} \begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -.448 \end{bmatrix}$$

من نسبة رايلي يكون التقدير الثانى للقيمة الذاتية السائدة هو

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_2, A\mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle} = \frac{(1)(2.23) + (-.385)(-1)}{(1)(1) + (-.385)(-.385)} = 2.278$$

ضرب \mathbf{x}_3 بالمصفوفة A ثم تصغير مركبته يعطى

$$A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -.448 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.104 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \frac{1}{2.104} \begin{bmatrix} 2.104 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.475 \end{bmatrix}$$

التقدير الثالث للقيمة الذاتية السائدة هو

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_3, A\mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 \rangle} = \frac{(1)(2.104) + (-.448)(-1)}{(1)(1) + (-.448)(-.448)} = 2.125$$

بالاستمرار على هذا المنوال ، نشىء متتابعة تقريبات لمتجه ذاتى سائد والقيمة الذاتية السائدة .

القيم التى حسبت أعلاه ونتائج التقديرات التالية لها قد وضعت فى جدول فى شكل ٨ - ٣ .

(خطوة ٨ - ٢)

خطوة رقم ٢	0	1	2	3	4	5	6	7
$= x_i$								
التقريب لمتجه	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -385 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -448 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -475 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -488 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -494 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -497 \end{bmatrix}$
ذاتي سائد								
صفرت مركباته								
Ax_i	$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.104 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.050 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.024 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.012 \\ -1 \end{bmatrix}$	—
تقريب λ_1	—	2.692	2.278	2.125	2.060	2.029	2.014	—

لا توجد قواعد محكمة وسريعة لتحديد عدد الخطوات التي تستخدم في طريقة القوى ، وسنذكر طريقة واحدة ممكنة وشائعة الاستعمال .

إذا كانت \tilde{q} ترمز لتقريب للقيمة q ، فإن الخطأ النسبي في التقريب يعرف بأنه

$$\left| \frac{q - \tilde{q}}{q} \right| \quad (8.17)$$

والخطأ المئوي في التقريب يعرف بأنه

$$\left| \frac{q - \tilde{q}}{q} \right| \times 100\%$$

مثال (١٠) :

إذا كانت القيمة المضبوطة لقيمة ذاتية معينة هي $\lambda = 5$ وكانت $\tilde{\lambda} = 5.1$ هي تقريب للقيمة λ فإن الخطأ النسبي هو

$$\left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{\lambda} \right| = \left| \frac{5 - 5.1}{5} \right| = |-0.02| = 0.02$$

والخطأ المئوي هو

$$(0.02) \times 100\% = 2\%$$

في طريقة القوى قد نرى أن نحدد مقدما الخطأ النسبي E الذي يمكننا التغاضي عنه في القيمة الذاتية ثم نوقف عمليات الحساب متى أصبح الخطأ النسبي أقل من E . فإذا كانت $\tilde{\lambda}(i)$ ترمز إلى التقريب للقيمة الذاتية السائدة λ_1 في الخطوة i فإن عمليات الحساب توقف متى تحقق الشرط .

$$\left| \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}(i)}{\lambda_1} \right| < E$$

ولسوء الحظ ليس ممكناً أن ننفذ هذه الفكرة حيث إن القيمة الذاتية المضبوطة λ_1 غير معلومة للتغلب على ذلك عادة تقدر λ_1 بالقيمة $\tilde{\lambda}(i)$ ونوقف عمليات الحساب في الخطوة i إذ كان

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}(i) - \tilde{\lambda}(i-1)}{\tilde{\lambda}(i)} \right| < E \quad (8.18)$$

تسمى الكمية الموجودة في الطرف الأيسر من (8.18) بتقدير الخطأ النسبي عند ضربها في 100% تسمى بتقدير الخطأ المئوي .

مثال (١١) :

في مثال ٩ ما هو عدد الخطوات التي يجب أن تستخدم لضمان أن الخطأ المئوي في القيمة الذاتية السائدة يكون أقل من 2% ؟

الحل : اعتبر أن $\tilde{\lambda}(i)$ ترمز إلى تقريب القيمة الذاتية السائدة في الخطوة i من شكل ٨ - ٣

$$\tilde{\lambda}(1) = 2.692, \quad \tilde{\lambda}(2) = 2.278, \quad \tilde{\lambda}(3) = 2.125,$$

وهلم جرا .

من (8.18) يكون تقدير الخطأ النسبي بعد خطوتين هو

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}(2) - \tilde{\lambda}(1)}{\tilde{\lambda}(2)} \right| = \left| \frac{2.278 - 2.692}{2.278} \right| \approx |-0.182| = 0.182$$

ويكون تقدير الخطأ المئوي بعد خطوتين هو 18.2%

تقدير الخطأ النسبي بعد ثلاث خطوات هو

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}(3) - \tilde{\lambda}(2)}{\tilde{\lambda}(3)} \right| = \left| \frac{2.125 - 2.278}{2.125} \right| \approx |-0.072| = 0.072$$

وتقدير الخطأ المئوي هو 7.2% وقد وضعت بقية الأخطاء المئوية في جدول في شكل ٨ - ٤ . من هذا الجدول نرى أن تقدير الخطأ المئوي أقل من 2% في نهاية الخطوة الخامسة .

رقم الخطوة = i	2	3	4	5	6
$\bar{\lambda}(i)$	2.278	2.125	2.060	2.029	2.014
الخطأ النسبي المقدر بعد i خطوة	.182	.072	.032	.015	.007
الخطأ المئوي المقدر بعد i خطوة	18.2%	7.2%	3.2%	1.5%	.7%

(شكل ٨ - ٤)

مادة اختيارية :

نختتم هذا القسم بإثبات أن طريقة القوى تصلح عندما تكون المصفوفة A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ولها قيمة ذاتية سائدة .

افرض أن A مصفوفة من النوع $n \times n$ قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية من نظرية ٢ بقسم ٦ - ٢ يكون للمصفوفة A عدد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً v_1, v_2, \dots, v_n . افرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية المناظرة وافرض أن

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (8.19)$$

من نظرية ٩ (أ) بقسم ٤ - ٥ تكون المتجهات الذاتية v_1, v_2, \dots, v_n أساساً للفضاء R^n وإذن أى متجه اختياري x_0 في R^n يمكن التعبير عنه بالصورة

$$x_0 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \quad (8.20)$$

ضرب الطرفين من اليسار بالمصفوفة A يعطى

$$\begin{aligned} Ax_0 &= A(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n) \\ &= k_1 (Av_1) + k_2 (Av_2) + \dots + k_n (Av_n) \\ &= k_1 \lambda_1 v_1 + k_2 \lambda_2 v_2 + \dots + k_n \lambda_n v_n \end{aligned}$$

الضرب بالمصفوفة A مرة أخرى يعطى

$$\begin{aligned} A^2 x_0 &= A(k_1 \lambda_1 v_1 + k_2 \lambda_2 v_2 + \dots + k_n \lambda_n v_n) \\ &= k_1 \lambda_1 (Av_1) + k_2 \lambda_2 (Av_2) + \dots + k_n \lambda_n (Av_n) \\ &= k_1 \lambda_1^2 v_1 + k_2 \lambda_2^2 v_2 + \dots + k_n \lambda_n^2 v_n \end{aligned}$$

بالاستمرار نحصل بعد الضرب بالمصفوفة A عدد p من المرات ، على

$$A^p \mathbf{x}_0 = k_1 \lambda_1^p \mathbf{v}_1 + k_2 \lambda_2^p \mathbf{v}_2 + \cdots + k_n \lambda_n^p \mathbf{v}_n \quad (8.21)$$

حيث إن $\lambda_1 \neq 0$ (انظر (8.19)) فإن (8.21) يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$A^p \mathbf{x}_0 = \lambda_1^p \left(k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^p \mathbf{v}_2 + \cdots + k_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^p \mathbf{v}_n \right) \quad (8.22)$$

من (8.19) ينتج أن

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

جميعها أقل من الواحد في القيمة المطلقة . إذن $(\lambda_2/\lambda_1)^p, \dots, (\lambda_n/\lambda_1)^p$ تقترب باستمرار من الصفر بزيادة p ، ومن (8.22) يصبح التقريب

$$A^p \mathbf{x}_0 \approx \lambda_1^p k_1 \mathbf{v}_1 \quad (8.23)$$

أفضل فأفضل

إذا كانت $k_1 \neq 0$ فإن $\lambda_1^p k_1 \mathbf{v}_1$ يكون مضاعفا قياسيا غير صفري للمتجه الذاتي السائد \mathbf{v}_1 وعليه فإن $\lambda_1^p k_1 \mathbf{v}_1$ هو أيضاً متجه ذاتي سائد . إذن من (8.23) يصبح $A^p \mathbf{x}_0$ تقديراً أفضل فأفضل لمتجه ذاتي سائد كلما زادت p .

تمارين ٨ - ٣

١ - أوجد القيمة الذاتية السائدة (إن وجدت) .

$$(أ) \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(ج) \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(*) عادة لا يمكن المرء بمعاينة \mathbf{x}_0 التي اختيرت أن يؤكد ما إذا كانت $k_1 \neq 0$. إذا حدث بالصدفة أن كانت $k_1 = 0$ فإن طريقة القوى تظل صالحة في المسائل العملية حيث إن خطأ الحاسب العددي بتقريب الأرقام يبنى بحيث يحمل k_1 صغيرة وليست صفراً . وهذه حالة تساعد فيها الأخطاء على الحصول على نتائج صحيحة .

٢ - اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب متجه ذاتي سائد للمصفوفة A . ابدأ بالمتجه

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف بعد ثلاثة تكرارات (أى ثلاث عمليات ضرب بالمصفوفة A).

(ب) استخدم نتيجة الجزء (أ) وخارج قسمة رايلي ، لتقريب القيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A

(ج) أوجد القيم المضبوطة للمتجه الذاتي السائد والقيمة الذاتية السائدة .

(د) أوجد الخطأ المتوى في تقريب القيمة الذاتية السائدة .

في التمرينين ٣ - ٤ أوجد المطلوب في تمرين (٢)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - ٤$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - ٣$$

٥ - اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب القيمة الذاتية السائدة ومتجه ذاتي سائد للمصفوفة A ابدأ بالمتجه

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف عندما يقل الخطأ المتوى في القيمة الذاتية السائدة عن 2% .

(ب) أوجد القيم المضبوطة للقيمة الذاتية السائدة والمتجه الذاتي السائد .

٦ - كرر المطلوب في تمرين (٥) مع المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

٧ - اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(أ) استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب متجه ذاتي سائد للمصفوفة A أبدأ بالمتجه

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف بعد ثلاثة تكرارات .

(ب) استخدم نتيجة الجزء (أ) وخارج قسمة رايل لتقريب القيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A .

(ج) أوجد القيم المضبوطة للقيمة الذاتية السائدة والمتجه الذاتي السائد .

(د) أوجد الخطأ المئوي في تقريب القيمة الذاتية السائدة .

٨ - ٤ تقريب القيم الذاتية غير السائدة بطريقة تحليل المصفوفة

سنذكر في هذا القسم باختصار طريقة للحصول على المتجهات الذاتية والقيم الذاتية غير السائدة لمصفوفة ممتلئة .

سنحتاج إلى النظرية التالية التي نذكرها بدون إثبات * .

نظرية ١ : اعتبر A مصفوفة ممتلئة من النوع $n \times n$ ولها القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. إذا كان v_1 متجهاً ذاتياً مناظراً للقيمة λ_1 وكان $\|v_1\| = 1$ فإن :

(أ) المصفوفة $B = A - \lambda_1 v_1 v_1'$ لها القيم الذاتية $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(ب) إذا كان v متجهاً ذاتياً للمصفوفة B مناظراً لإحدى القيم الذاتية $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ فيكون v أيضاً متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظراً لهذه القيمة الذاتية .

(نحن نفترض في نظرية (١) أن v_1 مبرأ عنه كمصفوفة من النوع $n \times 1$ وعليه فإن $v_1 v_1'$ مصفوفة من النوع $n \times n$)

مثال (١٢) :

أثبتنا في مثال (٥) بقسم ٦ - ١ أن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

* القراء الذين يهتمون بإثبات هذه النظرية عليهم الرجوع إلى المراجع المطاعة في نهاية هذا القسم .

لها القيم الذاتية $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$ وأن

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هو متجه ذاتي المناظر للقيمة $\lambda_1 = 5$. بوضع v في الصورة العيارية نحصل على

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهو متجه ذاتي ، معياره 1 المناظر $\lambda_1 = 5$.

من نظرية (١) يجب أن يكون المصفوفة

$$\begin{aligned} B &= A - \lambda_1 v_1 v_1' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

القيم الذاتية $\lambda = 0, 5, 1$. لتأكد فإن المعادلة المميزة للمصفوفة B هي

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$$

ومن ثم فإن القيم الذاتية للمصفوفة B هي $\lambda = 0, \lambda = 5, \lambda = 1$ كما تنبأنا نظرية (١)

فضاء B الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ هو فضاء الحل للنظام

$$(5I - B)x = 0$$

أى

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام يعطى $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = t$ إذ المتجهات الذاتية للمصفوفة B المناظرة للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ هي المتجهات غير الصفريّة التي على الصورة .

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

كما ينشأ الجزء (ب) من نظرية (١) هذه هي أيضاً المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ لأن

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5t \end{bmatrix}$$

أى أن

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

بالمثل متجهات B الذاتية التي تناظر $\lambda = 1$ هي أيضاً متجهات ذاتية للمصفوفة A تناظر $\lambda = 1$.

تجمل نظرية (١) ، إلى درجة محدودة ، من الممكن تحديد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية غير السائدة لمصفوفة متماثلة من النوع $n \times n$. لتوضيح ذلك ، افترض أن المتجهات الذاتية للمصفوفة A يمكن ترتيبها تبعاً لقدر القيم المطلقة كما يلي

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (8.24)$$

افترض أن متجه ذاتي سائد والقيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A قد حصلنا عليهما بطريقة القوى . تجمل المتجه الذاتي السائد له المعيار ١ نحصل على متجه ذاتي سائد v_1 له المعيار 1 . من نظرية ١ تكون القيم الذاتية للمصفوفة $B = A - \lambda_1 v_1 v_1'$ هي $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ من (8.24) سترتب هذه القيم الذاتية تبعاً لقيمتها المطلقة كما يلي :

$$|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

وعليه فإن λ_2 هي القيمة السائدة للمصفوفة B . بتطبيق طريقة القوى الآن على B يمكننا تقريب القيمة الذاتية λ_2 ومتجه ذاتي مناظر. تسمى هذه الطريقة لتقريب القيمة الذاتية التي لها القيمة المطلقة الثابتة في الكبر بطريقة التحلل.

للأسف توجد قيود عملية لطريقة التحلل حيث أن λ_1, v_1 قد قربا فقط بطريقة القوى فينشأ خطأ في المصفوفة B عند استخدام طريقة التحلل. إذا طبقت طريقة التحلل مرة أخرى فإن المصفوفة التالية يكون بها خطأ إضافي ناتج عن تقريب λ_2, v_2 . كلما استمرت العملية فإن هذه الأخطاء المركبة تحطم دقة النتائج. وعملياً يجب على المرء بوجه عام أن يتجنب إيجاد أكثر من قيمتين أو ثلاث قيم ذاتية بطريقة التحلل.

عندما تكون النسبة $|\lambda_2/\lambda_1|$ قريبة من الواحد فإن طريقة القوى يكون لها معدل تقارب بطيء، أي أننا نحتاج إلى خطوات كثيرة للحصول على درجة معقولة من الدقة. القراء المهتمون بدراسة طرق «زيادة سرعة» معدل التقارب هذا، ويتعلم المزيد عن الطرق العددية للجبر الخطي يمكنهم الرجوع إلى المراجع التالية:

Analysis of Numerical Methods, E. Isaacson and H. B. Keller, John Wiley and Sons, New York, 1966.

Applied Linear Algebra, B. Noble, Prentice Hall, Inc., 1969.

Computational Methods of Linear Algebra, V. N. Faddeeva, Dover, 1959.

تظهر مراجع أخرى في مراجع هذين الكتابين

تمارين ٨ - ٤

١ - اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب متجه ذاتي سائد. ابدأ بالمتجه

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف بعد ثلاثة تكرارات (أي بعد ثلاث مرات ضرب بالمصفوفة A).

(ب) استخدم نتيجة الجزء (أ) وخارج قسمة رايل لتقريب القيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A .

(ج) استخدم طريقة التحلل لتقريب القيمة الذاتية الباقية ومتجه ذاتي مناظر، أي طبق طريقة القوى على المصفوفة

$$B = A - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 \bar{v}_1^T$$

حيث \bar{v}_1 و $\bar{\lambda}_1$ هما التقريران اللذان حصلت عليهما في الجزئين (أ) ، (ب) ابدأ بالمتجه

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف بعد ثلاثة تكرارات .

(د) أوجد القيم المضبوطة للقيم الذاتية والمتجهات الذاتية .

٢- أوجد المطلوب في تمرين ١ بالنسبة إلى المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

اجوبة التمارين

تمارين ١ - ١ (صفحة ٧)

١ - ب د د و

$$x = \frac{7}{6}t + \frac{1}{2}, y = t \quad (أ) - ٢$$

$$x_1 = -2s + \frac{7}{2}t + 4, x_2 = s, x_3 = t \quad (ب)$$

$$x_1 = \frac{4}{3}r - \frac{7}{3}s + \frac{8}{3}t - \frac{5}{3}, x_2 = r, x_3 = s, x_4 = t \quad (ج)$$

$$v = \frac{1}{2}q - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}s + 2t, w = q, x = r, y = s, z = t \quad (د)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (أ) - ٣$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \quad (ب)$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2 \quad (د)$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = 4$$

$$x_1 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad (أ) - ٤$$

$$-x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \quad (ج)$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1$$

٥ - $k = 6$ عدد لانهاى من الحلول

$k \neq 6$ لا توجد حلول

٦ - (أ) لا توجد للمستقيات نقطة تقاطع مشتركة

(ب) تتقاطع المستقيات في نقطة واحدة بالضبط .

(ج) تنطبق المستقيات الثلاثة

تمارين ١ - ٢ (صفحة ١٦)

١ - د ، و ٢ - ب ، ج ، و

(أ) - ٣
 $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2$
 (ب)
 $x_1 = 2 - 3t, x_2 = 4 + t, x_3 = 2 - t, x_4 = t$
 (ج)
 $x_1 = -1 - 5s - 5t, x_2 = s, x_3 = 1 - 3t, x_4 = 2 - 4t, x_5 = t$
 (د) غير متوافقة

(أ) - ٤
 $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2$
 (ب)
 $x_1 = 2 - 3t, x_2 = 4 + t, x_3 = 2 - t, x_4 = t$
 (ج)
 $x_1 = -1 - 5s - 5t, x_2 = s, x_3 = 1 - 3t, x_4 = 2 - 4t, x_5 = t$
 (د) غير متوافقة

(أ) - ٥
 $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$
 (ب)
 $x_1 = -\frac{3}{7}t, x_2 = -\frac{4}{7}t, x_3 = t$
 (ج)
 $x_1 = 1, x_2 = 2s, x_3 = s, x_4 = -3t, x_5 = t$

٧ - (أ) غير متوافقة (ب) $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 7$ (ج) $x_1 = 3 + 2t, x_2 = t$

٩ - (أ) $x_1 = 0, x_2 = -3t, x_3 = t$ (ب) غير متوافقة

١١ - (أ)
 $x_1 = \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b, x_2 = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{9}b$

(ب)
 $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$

١٢ - $a = 4$ عدد لانهائي ، $a = -4$ لا يوجد ، $a \neq \pm 4$ واحد بالضبط .

١٤ - $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هما الحلان الممكنان

١٥ - $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi, \gamma = 0$

تمارين ١ - ٣ (صفحة ٢١)

١ - أ ، ج ، د

٢ - $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

٣ - $x_1 = -\frac{1}{4}s, x_2 = -\frac{1}{4}s - t, x_3 = s, x_4 = t$

٤ - $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$

$$x = \frac{t}{8}, y = \frac{5t}{16}, z = t \quad - \quad ٥$$

$$\lambda = 4, \lambda = 2 \quad - \quad ٦$$

تمارين ١ - ٤ (صفحة ٢٨)

$$\begin{array}{lll} \text{(أ) غير معرف} & 4 \times 2 & \text{(ب) غير معرف} \\ \text{(د) غير معرف} & 5 \times 5 & \text{(ج) غير معرف} \\ & & 5 \times 2 \end{array}$$

$$a = 5, b = -3, c = 4, d = 1 \quad - \quad ٣$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(أ)} \quad \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \quad \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(أ) - ٤}$$

$$\begin{bmatrix} -28 & 7 \\ 0 & -14 \end{bmatrix} \quad \text{(و)} \quad \begin{bmatrix} 14 & 36 & 25 \\ 4 & -1 & 7 \\ 12 & 26 & 21 \end{bmatrix} \quad \text{(أ)} \quad \begin{bmatrix} 9 & 8 & 19 \\ -2 & 0 & 0 \\ 32 & 9 & 25 \end{bmatrix} \quad \text{(د)}$$

$$\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \quad \text{(أ) غير معرف} \quad - \quad ٥$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{(د)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 48 & 15 & 31 \\ 0 & 2 & 6 \\ 38 & 10 & 27 \end{bmatrix} \quad \text{(و)} \quad \text{(أ) غير معرف}$$

$$[63 \ 67 \ 57] \quad \text{(ب)} \quad [67 \ 41 \ 41] \quad \text{(أ) - ٦}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix} \quad \text{(د)} \quad \begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix} \quad \text{(و)} \quad [24 \ 56 \ 97] \quad \text{(أ)}$$

تمارين ١ - ٥ (صفحة ٢٨)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad - ٣$$

$$y \quad - ٥$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad - ٧ \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad - ٦$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{bmatrix} \quad A^{-3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{26}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix} \quad A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad - ٨$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad - ٩$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad - ١٠$$

$$(c) (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \quad - ١١$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \quad - ١٢$$

١٧ - من الجائز ألا يكون $0A$ ، AO بنفس المقاييس .

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad - ١٨$$

تمارين ١ - ٦ (صفحة ٢٧)

١ - أ ، ب ، د ، ز

٢ - (أ) أضف ناقص خمسة أمثال الصف الأول إلى الثاني :

(ب) أبدل الصفين الأول والثالث .

(ج) إضرب الصف الثاني في $1/8$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (أ) - \text{ر}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

٤ - لا ، لأن C لا يمكن الحصول عليه بإجراء عملية صفوف واحدة على B .

$$\text{(ج) غير قابلة للانعكاس} \quad \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (أ) - \text{هـ}$$

$$\text{(ب) غير قابلة للانعكاس} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad (أ) - \text{و}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{و}) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (أ) - \text{ز}$$

(ج) غير قابلة للانعكاس

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{ح}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (أ) - \text{ط}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 11$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\varphi) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix} (\psi) - 12$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix} (\pi)$$

تمرین ۱ - ۷ (صفحة ۵۵)

$$x_1 = 41, x_2 = -17 \quad - \quad 1$$

$$x_1 = \frac{46}{17}, x_2 = -\frac{17}{17} \quad - \quad 2$$

$$x_1 = -7, x_2 = 4, x_3 = -1 \quad - \quad 3$$

$$x_1 = 1, x_2 = -11, x_3 = 16 \quad 4$$

$$x = 1, y = 5, z = -1 \quad - \quad 5$$

$$w = 1, x = -6, y = 10, z = -7 \quad - \quad 6$$

$$x_1 = -\frac{4}{3}, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{10}{3} \quad (\varphi) \quad x_1 = \frac{16}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = -\frac{11}{3} \quad (\psi) - \quad 7$$

$$x_1 = \frac{41}{17}, x_2 = -\frac{17}{17}, x_3 = \frac{21}{17} \quad (\delta) \quad x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -4 \quad (\epsilon) - \quad 8$$

$$b_3 = b_2 - b_1, b_4 = 2b_1 - b_2 \quad (\varphi) \quad b_2 = 3b_1, b_3 = -2b_1 \quad (\psi) - \quad 9$$

$$X = \begin{bmatrix} 4t \\ \frac{5t}{2} \\ 1 \end{bmatrix} (\varphi) \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\psi) - \quad 10$$

تمارين ٢ - ١ (صفحة ٦٢)

- ١ - (أ) 5 (ب) 7 (ج) 10 (د) 0 (هـ) 4 (و) 5
 ٢ - (أ) فردية (ب) فردية (ج) زوجية (د) زوجية (هـ) زوجية (و) فردية
 ٣ - 5 - ٤ 0 - ٥ 59 - ٦ - 4k - 5 - ٦ k² - 4k - 5 - ٦ 0 - ٧
 ٨ - 425 - ٩ 104 - ١٠ - 21 - 9k + 18k² - k³ - k⁴
 ١١ - (أ) λ = 3, λ = 2 (ب) λ = 2, λ = 6
 ١٥ - 120 (أ) - 120 (ب)

تمارين ٢ - ٢ (صفحة ٦٧)

- ١ - (أ) 6 (ب) -16 (ج) 0 (د) 0
 ٢ - 21 - ٣ - 5 - ٤ - 36 - ٥ 35 - ٥
 ٦ - 128 - ٧ - 72 - ٨ - ١ - 9 0
 ١٠ - (أ) 5 (ب) 10 (ج) 5 (د) 10

تمارين ٢ - ٣ (صفحة ٧٥)

- ١ - (أ) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 6 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$
 ٤ - (أ) قابلة للانعكاس (ب) غير قابلة للانعكاس
 (ج) غير قابلة للانعكاس (د) غير قابلة للانعكاس
 ٥ - (أ) 135 (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{1}{40}$ (د) -5
 ٦ - إذا كانت $x = 0$ فإن الصفين الأول والثالث متناسبان .
 إذا كانت $x = 2$ فإن الصفين الأول والثاني متناسبان .
 ٨ - (أ) $k = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{17})$, $k = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17})$ (ب) $k = -1$

تمارين ٢ - ٤ (صفحة ٨٥)

- ١ - (أ) $M_{11} = 29, M_{12} = -11, M_{13} = -19, M_{21} = 21, M_{22} = 13, M_{23} = -19$
 $M_{31} = 27, M_{32} = -5, M_{33} = 19$
 (ب) $C_{11} = 29, C_{12} = 11, C_{13} = -19, C_{21} = -21, C_{22} = 13$
 $C_{23} = 19, C_{31} = 27, C_{32} = 5, C_{33} = 19$

$$\begin{aligned} M_{23} &= 24, C_{23} = -24 \quad (\text{ب}) & M_{13} &= 36, C_{13} = 36 \quad (\text{أ}) - ٢ \\ M_{21} &= -108, C_{21} = 108 \quad (\text{د}) & M_{22} &= -48, C_{22} = -48 \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

$$152 - ٣$$

$$(\text{أ}) \begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix} (\text{ب}) \begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix} (\text{أ}) - ٤$$

$$-120 - ٩ \quad k^3 - 8k^2 - 10k + 95 - ٨ \quad 0 - ٧ \quad -66 - ٦ \quad 48 - ٥$$

$$0 - ١٠$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} - ١١$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2 - ١٢$$

$$x = \frac{3}{11}, y = \frac{2}{11}, z = -\frac{1}{11} - ١٣$$

$$x = \frac{26}{11}, y = \frac{21}{11}, z = \frac{2}{11} - ١٤$$

$$x_1 = -\frac{30}{11}, x_2 = -\frac{38}{11}, x_3 = -\frac{40}{11} - ١٥$$

$$x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = -1, x_4 = 8 - ١٦$$

$$١٧ - \text{قاعدة كرامر لاتصلح للتطبيق .}$$

$$z = 2 - ١٨$$

تمارين ٢ - ١ (صفحة ٩٧)

$$\overline{P_1 P_2} = (-7, 2) \quad (\text{ب}) \quad \overline{P_1 P_2} = (-1, 3) \quad (\text{أ}) - ٣$$

$$\overline{P_1 P_2} = (-8, 7, 4) \quad (\text{د}) \quad \overline{P_1 P_2} = (2, -12, -11) \quad (\text{ج})$$

$$\text{هو أحد الحلول الممكنة . } Q = (9, 5, 1) \quad \text{حيث } \overline{PQ} - ٤$$

$$\text{هو أحد الحلول الممكنة . } P = (0, 4, -8) \quad \text{حيث } \overline{PQ} - ٥$$

$$(23, -15, 4) \quad (\text{ب}) \quad (-2, 0, 4) \quad (\text{أ}) - ٦$$

$$(-39, 69, -12) \quad (\text{د}) \quad (-1, -5, 2) \quad (\text{ج})$$

$$(0, -10, 0) \quad (\text{و}) \quad (-30, -7, 5) \quad (\text{أ})$$

$$x = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1) - ٧$$

$$c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 3 - ٨$$

$$\begin{aligned} & \text{۱۰ - } c_1 = -t, c_2 = -t, c_3 = t \text{ (حيث } t \text{ اختياري)} \\ & \text{۱۱ - (أ) } \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ (ب) } \left(\frac{23}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ & \text{۱۲ - (أ) } x' = 5, y' = 8 \text{ (ب) } x = -1, y = 3 \end{aligned}$$

تمارين ۳ - ۲ (صفحة ۱۰۱)

$$\begin{aligned} & \text{۱ - (أ) } 5 \text{ (ب) } 5\sqrt{2} \text{ (ج) } 3 \text{ (د) } \sqrt{3} \text{ (هـ) } \sqrt{129} \text{ (و) } 9 \\ & \text{۲ - (أ) } \sqrt{31} \text{ (ب) } 2\sqrt{26} \text{ (ج) } \sqrt{209} \text{ (د) } \sqrt{93} \\ & \text{۳ - (أ) } 2\sqrt{3} \text{ (ب) } \sqrt{14} + \sqrt{2} \text{ (ج) } 4\sqrt{14} \text{ (د) } 2\sqrt{37} \\ & \text{۴ - } k = \pm \frac{3}{\sqrt{21}} \\ & \text{۵ - } (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \\ & \text{۸ - كرة قطرها 1 ومركزها عند } (x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

تمارين ۳ - ۳ (صفحة ۱۰۷)

$$\begin{aligned} & \text{۱ - (أ) } -10 \text{ (ب) } -3 \text{ (ج) } 0 \text{ (د) } -20 \\ & \text{۲ - (أ) } -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (ب) } -\frac{3}{\sqrt{58}} \text{ (ج) } 0 \text{ (د) } -\frac{20}{3\sqrt{70}} \\ & \text{۳ - (أ) } \text{منفرجة} \text{ (ب) } \text{حادّة} \text{ (ج) } \text{منفرجة} \text{ (د) } \text{معامدان} \\ & \text{۴ - (أ) } \left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{13}\right) \text{ (ب) } (0, 0) \text{ (ج) } \left(-\frac{19}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) \text{ (د) } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ & \text{۵ - (أ) } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ (ب) } (2, 6) \text{ (ج) } \left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right) \text{ (د) } \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) \\ & \text{۶ - } \pm \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) \\ & \text{۸ - (أ) } 6 \text{ (ب) } 36 \text{ (ج) } 24\sqrt{5} \text{ (د) } 24\sqrt{5} \\ & \text{۱۰ - } \cos \theta_1 = 0, \cos \theta_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ & \text{۱۳ - } \theta = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ & \text{۱۴ - } \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

تمارين ٣ - ٤ (صفحة ١١٦)

١ - (أ) $(-23, 7, -1)$ (ب) $(-20, -67, -9)$ (ج) $(-78, -52, -26)$ (د) $(0, -56, -392)$ (هـ) $(24, 0, -16)$ (و) $(-12, -22, -8)$ (ز) $(-78, -52, -26)$

٢ - (أ) $(12, 30, -6)$ (ب) $(-2, 0, 2)$

٣ - (أ) $\frac{1}{2}\sqrt{374}$ (ب) $9\sqrt{13}$

٧ - $x = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t)$ حيث t اختياري

٩ - 227

١٠ - (أ) $u = (0, 1, 0)$ and $v = (1, 0, 0)$

(ب) $(-1, 0, 0)$

(ج) $(0, 0, -1)$

تمارين ٣ - ٥ (صفحة ١٢٥)

١ - (أ) $(x-2) + 4(y-6) + 2(z-1) = 0$

(ب) $-(x+1) + 7(y+1) + 6(z-2) = 0$

(ج) $z = 0$

(د) $2x + 3y + 4z = 0$

٢ - (أ) $x + 4y + 2z - 28 = 0$ (ب) $-x + 7y + 6z - 6 = 0$

(ج) $2x + 3y + 4z = 0$ (د) $z = 0$

٣ - (أ) $(5, 0, 0)$ نقطة في المستوى و $n = (2, -3, 7)$ متجه عمودي إذا

$2(x-5) - 3y + 7z = 0$ هي صورة النقطة والمعمدى تغطي أية نقط أخرى وأعمدة

أخرى إجابات صحيحة .

(ب) $x + 3z = 0$ أحد الحلول الممكنة

٤ - (أ) $2y - z - 1 = 0$ (ب) $x + 9y - 5z - 16 = 0$

٥ - (أ) $x = 2 + t, y = 4 + 2t, z = 6 + 5t$

(ب) $x = -3 + 5t, y = 2 - 7t, z = -4 - 3t$

(ج) $x = 1, y = 1, z = 5 + t$

(د) $x = t, y = t, z = t$

٦ - (أ) $x - 2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{5}$ (ب) $\frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+4}{-3}$

٧ - (أ) $x = 6 + t, y = -1 + 3t, z = 5 - 9t$ or $x = 7 + t, y = 2 + 3t$

$z = -4 - 9t$ إجابات ممكنة

$$x = -t, y = -t, z = -t \text{ or } x = -1 - t, y = -1 - t, z = -1 - t \quad (\text{ب})$$

[جوابات ممکنه]

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t, y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, z = t \quad (أ) - \text{ v}$$

$$x = \frac{3}{2}t, y = t, z = 0 \quad (\text{ب})$$

$$3x - 5y = 0, 2y - z = 0 \quad (\text{ب}) \quad x - 2y - 17 = 0, y + 2z - 5 = 0 \quad (أ) - \text{ q}$$

$$x = 0 : yz \text{ مستوى} , y = 0 : xz \text{ مستوى} , z = 0 : xy \text{ مستوى} - \text{ ١٠}$$

$$(-\frac{22}{3}, -\frac{64}{3}, \frac{7}{3}) - \text{ ١٢}$$

$$5x - 2y + z - 30 = 0 - \text{ ١٣}$$

$$(-17, -1, 1) - \text{ ١٥}$$

$$x - 4y + 4z + 9 = 0 - \text{ ١٦}$$

تمارين ٤ - ١ (صفحة ١٢٢)

$$(-1, 2, 7, -10) \quad (\text{ج}) \quad (53, 34, 49, 20) \quad (\text{ب}) \quad (-3, -4, -8, 4) \quad (أ) - \text{ ١}$$

$$(2, 6, 15, -14) \quad (\text{د}) \quad (-63, -28, -21, -69) \quad (\text{ا}) \quad (-99, -84, -150, 30) \quad (\text{د})$$

$$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1 - \text{ ٢} \quad (-\frac{7}{6}, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) - \text{ ٢}$$

$$\sqrt{48} \quad (\text{د}) \quad \sqrt{14} \quad (\text{ج}) \quad \sqrt{11} \quad (\text{ب}) \quad 5 \quad (أ) - \text{ ٤}$$

$$\sqrt{1801} \quad (\text{د}) \quad 4\sqrt{14} \quad (\text{ج}) \quad \sqrt{14} + 3\sqrt{7} \quad (\text{ب}) \quad \sqrt{73} \quad (أ) - \text{ ٦}$$

$$1 \quad (\text{د}) \quad \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad (\text{ا})$$

$$k = \pm \frac{3}{\sqrt{14}} - \text{ ٨}$$

$$27 \quad (\text{د}) \quad 0 \quad (\text{ج}) \quad -1 \quad (\text{ب}) \quad -1 \quad (أ) - \text{ ٩}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ و } \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad (أ) - \text{ ١٠}$$

$$10 \quad (\text{د}) \quad \sqrt{59} \quad (\text{ج}) \quad 3\sqrt{3} \quad (\text{ب}) \quad \sqrt{10} \quad (أ) - \text{ ١١}$$

تمارين ٤ - ٢ (صفحة ١٢٨)

١ - ليس بفضاء خطي. الفرض ٨ غير متحقق .

٢ - ليس بفضاء خطي. الفرض ١٠ غير متحقق .

- ٣ - ليس بفضاء خطي . الفرضان ٩ ، ١٠ غير متحقق .
 ٤ - الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المطاطتين .
 ٥ - الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المطاطتين .
 ٦ - ليس بفضاء خطي الفرضان ٥ ، ٦ غير متحققين .
 ٧ - الفئة تكون فضاء خطياً بالنسبة إلى العمليتين المطاطتين .
 ٨ - ليس بفضاء خطي . الفرضان ٧ ، ٨ غير متحققين .
 ٩ - الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المطاطتين .
 ١٠ - ليس بفضاء خطي الفروض ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ غير متحققة .
 ١١ - الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المطاطتين .
 ١٢ - الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المطاطتين .
 ١٣ - الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المطاطتين .
 ١٤ - الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المطاطتين .

تمارين ٤ - ٣ (صفحة ١٤٨)

- ١ - أ ، ج ٢ - ب ، ج ٣ - أ ، ب ، د ٤ - ب ، د ، هـ
 ٥ - أ ، ب ، د
 ٦ - (أ) $(5, 9, 5) = 3u - 4v + w$ (ب) $(2, 0, 6) = 4u - 2w$
 (ج) $(0, 0, 0) = 0u + 0v + 0w$ (د) $(2, 2, 3) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$
 ٧ - (أ) $5 + 9x + 5x^2 = 3p_1 - 4p_2 + p_3$ (ب) $2 + 6x^2 = 4p_1 - 2p_3$
 (ج) $0 = 0p_1 + 0p_2 + 0p_3$ (د) $2 + 2x + 3x^2 = \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3$
 ٨ - أ ، ج ، د
 ٩ - (أ) المتجهات منشئة (ب) المتجهات غير منشئة
 (ج) المتجهات غير منشئة (د) المتجهات منشئة
 ١٠ - أ ، ج
 ١١ - كثيرات الحدود لا تنشئ P_2 .
 ١٢ - أ ، ب ، د
 ١٣ - $8x - 7y + z = 0$
 ١٤ - $x = 2t, y = 7t, z = -t$ حيث $-\infty < t < +\infty$

تمارين ٤ - ٤ (صفحة ١٥٥)

- ١ - (أ) Π_2 مضاعف قياسي للمتجه Π_1 .
(ب) المتجهات مرتبطة خطيا من نظرية ٦ .
(ج) P_2 مضاعف قياسي للمتجه P_1 .
(د) B مضاعف قياسي للمتجه A .
- ٢ - (أ) مستقلة (ب) مستقلة (ج) مستقلة (د) مرتبطة
- ٣ - (أ) مستقلة (ب) مستقلة (ج) مستقلة (د) مستقلة
- ٤ - (أ) مستقلة (ب) مستقلة (ج) مستقلة (د) مرتبطة
- ٥ - (أ) مرتبطة (ب) مستقلة (ج) مستقلة (د) مرتبطة
(هـ) مرتبطة (و) مرتبطة
- ٦ - (أ) غير واقعة في مستوى
(ب) تقع في مستويين .
- ٧ - (أ) غير واقعة على نفس المستقيم .
(ب) غير واقعة على نفس المستقيم .
(ج) تقع على نفس المستقيم .
- ٨ - $\lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = 1$

تمارين ٤ - ٥ (صفحة ١٦٣)

- ١ - (أ) يحتوي ساس R^2 على متجهين .
(ب) يحتوي أساس R^3 على ثلاثة متجهات .
(ج) يحتوي أساس P_2 على ثلاثة متجهات .
(د) يحتوي أساس M_{22} على أربعة متجهات .
- ٢ - أ ، ب . ٣ - أ ، ب ٤ - ج ، د
- ٧ - لا يوجد أساس ، البعد = صفر ٦ - أى من المتجهات v_1, v_2, v_3
- ٨ - الأساس : $(0, -1, 0, 1), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$ ، البعد = 2
- ٩ - لا يوجد أساس ، البعد = صفر
- ١٠ - الأساس $(-1, 0, 1), (3, 1, 0)$ ، البعد = 2

١١ - لا يوجد أساس ، البعد = صفر

١٢ - لا يوجد أساس ، البعد = صفر

١٣ - (أ) $(\frac{2}{3}, 1, 0), (-\frac{1}{3}, 0, 1)$ ، (ب) $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$

(ج) $(2, -1, 4)$ ، (د) $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$

١٤ - (أ) من بعد ٣ (ب) من بعد ٢ (ج) ذو بعد واحد

١٥ - من بعد ٣

تمارين ٤ - ٦ (صفحة ١٧٣)

$$\begin{aligned} r_1 &= (2, -1, 0, 1) & c_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} & c_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\ r_2 &= (3, 5, 7, -1) \\ r_3 &= (1, 4, 2, 7) & c_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} & c_4 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

١ (أ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ب) $(1, -3)$ - ٢

(1, 2, 0), (0, 0, 1) (أ) - ٣

(ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2 (أ)

(1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) (أ) - ٤

(ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3 (أ)

(1, 0, 5, 2, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, -3, 0, 1) (أ) - ٥

(ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3 (أ)

$$\begin{aligned} & \text{٦ - (أ) } (1, 1, -4, -3), (0, 1, -5, -2), (0, 0, 1, -\frac{1}{2}) \\ & \text{(ب) } (1, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -\frac{1}{2}) \\ & \text{(ج) } (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\text{٨ - (أ) } 3 \quad \text{(ب) القيمة الصغرى من } m, n.$$

$$\text{٩ - (أ) } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

(ب) b ليست من فضاء أعمدة A .

(ج) b ليست من فضاء أعمدة A .

تمارين ٤ - ٧ (صفحة ١٧٩)

$$\begin{aligned} & \text{١ - (أ) } -12 \quad \text{(ب) } 0 \quad \text{(ج) } 0 \quad \text{(د) } 120 \\ & \text{٢ - (أ) } -5 \quad \text{(ب) } 0 \quad \text{(ج) } 3 \quad \text{(د) } 52 \\ & \text{٣ - (أ) } 16 \quad \text{(ب) } 56 \\ & \text{٤ - (أ) } -6 \quad \text{(ب) } 0 \\ & \text{٦ - (أ) } \text{ليس بضرب داخل ، الفرض ٤ غير متحقق .} \\ & \text{(ب) } \text{ليس بضرب داخل ، الفرضان ٢ ، ٣ غير متحققين .} \\ & \text{(ج) } \langle u, v \rangle \text{ ضرب داخل .} \\ & \text{(د) } \text{ليس بضرب داخل ، الفرض ٤ غير متحقق .} \\ & \text{١٦ - (أ) } -\frac{49}{9} \quad \text{(ب) } 0 \\ & \text{١٧ - (أ) } 0 \quad \text{(ب) } 1 \quad \text{(ج) } -\frac{4}{\pi} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

تمارين ٤ - ٨ (صفحة ١٨٥)

$$\begin{aligned} & \text{١ - (أ) } \sqrt{21}, \quad \text{(ب) } \sqrt{206}, \quad \text{(ج) } \sqrt{2}, \quad \text{(د) } 0 \\ & \text{٢ - (أ) } \sqrt{16}, \quad \text{(ب) } \sqrt{85}, \quad \text{(ج) } 1, \quad \text{(د) } 0 \\ & \text{٣ - (أ) } \sqrt{6}, \quad \text{(ب) } 5 \\ & \text{٤ - (أ) } \sqrt{90}, \quad \text{(ب) } 0 \\ & \text{٥ - (أ) } \sqrt{45}, \quad \text{(ب) } 0 \\ & \text{٦ - (أ) } \sqrt{18}, \quad \text{(ب) } 0 \\ & \text{٧ - } \sqrt{18} \quad \text{٨ - } \sqrt{98} \quad \text{(ب) } 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 0 \text{ (ج)} & \frac{-3}{\sqrt{73}} \text{ (ب)} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ (ا)} - 9 \\
 \frac{2}{\sqrt{55}} \text{ (د)} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ (ب)} & \frac{-20}{9\sqrt{10}} \text{ (د)} \\
 & 0 \text{ (ب)} & 0 \text{ (ا)} - 10 \\
 & 0 \text{ (ب)} & \frac{19}{10\sqrt{7}} \text{ (ا)} - 11 \\
 k = -2, k = -3 \text{ (ب)} & & k = -3 \text{ (ا)} - 12 \\
 & & 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 - 13 \\
 & & \pm \frac{1}{\sqrt{3249}} (-34, 44, -6, 11) - 14
 \end{array}$$

تجارب ۴ - ۹ (صفحة ۱۹۷)

$$\begin{array}{ll}
 2 - 1 & \text{ب} \\
 4 - 1 & \text{ا} \\
 2 - 2 & \text{ب، د} \\
 4 - 1 & \text{ا} \\
 (1, 0), (0, -1) \text{ (ب)} & \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \text{ (ا)} - 7 \\
 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \text{ (ا)} & - 8 \\
 (1, 0, 0), \left(0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right), \left(0, \frac{30}{\sqrt{11925}}, \frac{105}{\sqrt{11925}}\right) \text{ (ب)} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, 0\right), - 9 \\
 \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right) \\
 \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right) - 10
 \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) - ١١$$

$$w_1 = \left(-\frac{4}{3}, 2, \frac{2}{3}\right), w_2 = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) - ١٢$$

$$w_1 = \left(\frac{39}{42}, \frac{9}{42}, \frac{120}{42}\right), w_2 = \left(\frac{3}{42}, -\frac{9}{42}, \frac{6}{42}\right) - ١٣$$

$$w_1 = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right), w_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{19}{4}, -\frac{9}{4}\right) - ١٤$$

$$Q\left(-\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}\right); \frac{1}{7}\sqrt{35} - ٢٢$$

$$Q\left(-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{16}{7}\right) - ٢٣$$

تمارين ٤ - ١٠ (صفحة ٢١٦)

$$(w)_S = (3, -7), [w]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix} (١) - ١$$

$$(w)_S = \left(\frac{5}{28}, \frac{3}{14}\right), [w]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{28} \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix} (ب)$$

$$(w)_S = \left(a, \frac{b-a}{2}\right), [w]_S = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b-a}{2} \end{bmatrix} (٣)$$

$$(v)_B = (3, -2, 1), [v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} (١) - ٢$$

$$(v)_B = (-2, 0, 1), [v]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (ب)$$

$$(p)_S = (4, -3, 1), [p]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} (١) - ٣$$

$$(p)_B = (0, 2, -1), [p]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} (ب)$$

$$(A)_B = (-1, 1, -1, 3), [A]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - ٤$$

$$(\mathbf{w})_S = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2}), [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix} (\uparrow) - ٥$$

$$(\mathbf{w})_S = (0, -2, 1), [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} (\uparrow) - ٦$$

$$B = \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} (\uparrow) - ٧$$

$$\mathbf{q} = 3 + 4x^2 (\uparrow) \quad \mathbf{w} = (16, 10, 12) (\uparrow) - ٨$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}, d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{13}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3 (\uparrow) - ٩$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٠$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{bmatrix} (\uparrow) \quad \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} (\uparrow) - ١١$$

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٢$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} (\uparrow) \quad \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٣$$

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{43}{12} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} (\uparrow) \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٤$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{23}{2} \\ 6 \end{bmatrix} (\uparrow) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٥$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{7}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٦$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (\uparrow) \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٧$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٨$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} (\uparrow) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} (\uparrow) - ١٩$$

$$(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) (\uparrow) - ٢٠$$

$$(-3.5\sqrt{2}, 1.5\sqrt{2}) (\uparrow) - ٢١$$

$$(-1 + 3\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}) (\uparrow) - ٢٢$$

$$(2.5 - \sqrt{3}, 2.5\sqrt{3} + 1) (\uparrow) - ٢٣$$

$$(5\sqrt{2}, 1.5\sqrt{2}, 5) (\uparrow) - ٢٤$$

$$(-2.5\sqrt{2}, 3.5\sqrt{2}, -3) (\uparrow) - ٢٥$$

$$(-.5 - 2.5\sqrt{3}, 2, 2.5 - .5\sqrt{3}) (\uparrow) - ٢٦$$

$$(.5 - 1.5\sqrt{3}, 6, -1.5 - .5\sqrt{3}) (\uparrow) - ٢٧$$

$$(-1, 1.5\sqrt{2}, -3.5\sqrt{2}) (\uparrow) - ٢٨$$

$$(1, -1.5\sqrt{2}, 4.5\sqrt{2}) (\uparrow) - ٢٩$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (أ) - ٢٠$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (هـ)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} (أ) - ٢٢$$

$$(0, 0) \quad (د) \quad \left(-\frac{11}{3}, \frac{52}{3}\right) \quad (ج) \quad \left(-\frac{4}{3}, -\frac{22}{3}\right) \quad (ب) \quad (-2, -1) \quad (أ) - ٢٣$$

$$ج، أ - ٢٥$$

$$\left(-\frac{42}{5}, \frac{12}{5}, -3\right) \quad (ج) \quad (2, 1, 6) \quad (ب) \quad \left(\frac{12}{5}, -\frac{2}{5}, -7\right) \quad (أ) - ٢٧$$

$$(0, 0, 0) \quad (د)$$

$$(ب) - ٢٩$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} (أ) - ٣١$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} - ٣٢$$

تجارب ٥ - ١١ (٢٢٩)

- | | | | |
|--------------|----------|--------------|--------------|
| خطية - ٤ | خطية - ٣ | غير خطية - ٢ | خطية - ١ |
| غير خطية - ٨ | خطية - ٧ | خطية - ٦ | غير خطية - ٥ |

خطية - ٩	خطية - ١٠	غير خطية - ١١	خطية - ١٢
خطية - ١٣	غير خطية - ١٤	خطية - ١٥	غير خطية - ١٦
خطية - ١٧	خطية - ١٨	خطية - ١٩	غير خطية - ٢٠

$$F(x, y) = (-x, y) - ٢١$$

$$\begin{bmatrix} x + 3y + 4z \\ x - 7z \end{bmatrix} \text{ (ج) } \quad \begin{bmatrix} 42 \\ -55 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ (أ) } - ٢٢$$

$$T(x, y, z) = (x, 0, z) \text{ (ب) } \quad (2, 0, -1) \text{ (أ) } - ٢٤$$

$$T(3, 8, 4) = (-2, 3, -1) \text{ (أ) } - ٢٥$$

$$T(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \text{ (ب) }$$

$$T(-1, 2) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); T(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) \text{ (أ) } - ٢٦$$

$$T(-1, 2) = (1, -2); T(x, y) = (-x, -y) \text{ (ب) }$$

$$T(-1, 2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right); \text{ (ج) }$$

$$T(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

$$T(-1, 2) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right); \text{ (د) }$$

$$T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

تمارين ٥ - ٢ (صفحة ٢٣٧)

$$١ - ١ \quad \text{ج} \quad ٢ - ٢ \quad \text{أ} \quad ٣ - ٣ \quad \text{أ، ب، ج} \quad ٤ - ٤ \quad \text{أ}$$

$$\ker(T) = \{0\}; R(T) = V - \text{ج} \quad ٥ - ٥ \quad \text{ب} \quad ٦ - ٦ \quad \text{أ}$$

$$1 = (T) \text{ صفيرية } \quad \text{أ} \quad 1 = (T) \text{ رتبة } - ٨$$

$$0 = (T) \text{ صفيرية } \quad \text{ب} \quad 3 = (T) \text{ رتبة } - ٩$$

$$0 = (T) \text{ صفيرية } \quad \text{ج} \quad n = (T) \text{ رتبة } - ١٠ \quad \text{أ}$$

$$n = (T) \text{ صفيرية } \quad \text{د} \quad 0 = (T) \text{ رتبة } - ١١$$

$$0 = (T) \text{ صفيرية } \quad \text{هـ} \quad n = (T) \text{ رتبة } - ١٢$$

$$T(x, y, z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z), T(1, 1, 1) = (17, -5) - ١١$$

$$T(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2 - ١٢$$

$$4 = (T) \text{ صفرية (ب)} \quad 2 = (T) \text{ صفرية (أ)} - ١٢$$

$$1 = (T) \text{ صفرية (د)} \quad 3 = (T) \text{ صفرية (ج)}$$

$$6 = (T) \text{ رتبة } 0 = (T) \text{ صفرية} - ١٤$$

$$3 = (T) \text{ صفرية = البعد (أ)} - ١٥$$

(ب) لا لكي تكون $Ax = b$ متفقة لجميع b في R^5 ، يجب أن يكون $R(T) = R^5$.

ولكن $R(T) \neq R^5$ لأن رتبة $(T) =$ بعد $R(T) = 4$.

$$\begin{bmatrix} -\frac{14}{11} \\ \frac{12}{11} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (أ)} - ١٦$$

$$1 = (T) \text{ صفرية} \quad 2 = (T) \text{ رتبة (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (أ)} - ١٧$$

$$2 = (T) \text{ صفرية} \quad 1 = (T) \text{ رتبة (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (أ)} - ١٨$$

$$2 = (T) \text{ صفرية} \quad 2 = (T) \text{ رتبة (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (أ)} - ١٩$$

$$2 = (T) \text{ صفرية} \quad 3 = (T) \text{ رتبة (ج)}$$

$$x = -t, y = -t, z = t, -\infty < t < +\infty \text{ (ب)} \quad 14x - 8y - 5z = 0 \text{ (أ)} - ٢٢$$

٢٦ - يتكون $\ker(D)$ من جميع كثيرات الحدود الثوابت

٢٧ - يتكون $\ker(J)$ من جميع كثيرات الحدود التي على الصورة kx .

تمارين ٥ - ٢ (صفحة ٢٤٧)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} (د) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (ب) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (أ) - ١$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (ب) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (أ) - ٢$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} (د) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (ج)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (أ) - ٣$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (د) \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (ج)$$

$$(2, 0) (د) \quad (-2, -1) (ج) \quad (1, 2) (ب) \quad (2, -1) (أ) - ٤$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (ب) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (أ) - ٥$$

$$(1, 1, -1) (أ) - ٦$$

$$(1, -1, 1) (ب)$$

$$(-1, 1, 1) (ج)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (ج) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (ب) \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (أ) - ٧$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - ٨$$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} (ب) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} (أ) - ٩$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} (\varphi) \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} (\uparrow) - 11$$

$$-3x^2 + 5x^3 - 2x^4 (\varphi) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} (\uparrow) - 11$$

$$[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} (\uparrow) - 12$$

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ -\frac{83}{7} \end{bmatrix} (\pi) \quad T(v_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, T(v_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \end{bmatrix} (\varphi)$$

$$[T(v_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, [T(v_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} (\uparrow) - 12$$

$$[T(v_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, [T(v_4)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}, T(v_2) = \begin{bmatrix} -42 \\ 32 \\ -10 \end{bmatrix}, T(v_3) = \begin{bmatrix} -56 \\ 87 \\ 17 \end{bmatrix}, T(v_4) = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix} (\varphi)$$

$$\begin{bmatrix} -31 \\ 37 \\ 12 \end{bmatrix} (\pi)$$

$$[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} (\uparrow) - 14$$

$$T(v_1) = 16 + 51x + 19x^2, T(v_2) = -6 - 5x + 5x^2, (\varphi)$$

$$T(v_3) = 7 + 40x + 15x^2$$

$$T(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2 (\pi)$$

$$-6 + 48x (\pi) \quad \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\varphi) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\uparrow) - 18$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} (\pi) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} (\varphi) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (\uparrow) - 19$$

تمارين ٥ - ٤ (صفحة ٢٥٥)

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{56}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \quad - \quad ١$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{61}{10} \\ \frac{18}{5} & -\frac{19}{5} \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{155}{10} & \frac{2}{2} \\ -\frac{375}{10} & \frac{25}{2} \end{bmatrix} \quad - \quad ٢$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{13}{11\sqrt{2}} & -\frac{25}{11\sqrt{2}} \\ \frac{5}{11\sqrt{2}} & \frac{9}{11\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad - \quad ٣$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad - \quad ٤$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad - \quad ٥$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad - \quad ٦$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \quad ٧$$

تمارين ٦ - ١ (صفحة ٢٦٣)

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \quad (\text{ب}) \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad (\text{أ}) \quad - \quad ١$$

$$\lambda^2 + 3 = 0 \quad (\text{د}) \quad \lambda^2 - 12 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (\text{و}) \quad \lambda^2 = 0 \quad (\text{هـ})$$

$$\lambda = 4 \quad (\text{ب}) \quad \lambda = 3, \lambda = -1 \quad (\text{أ}) \quad - \quad ٢$$

$$\lambda = 1 \quad (\text{و}) \quad \lambda = \sqrt{12}, \lambda = -\sqrt{12} \quad (\text{ج})$$

$$\lambda = 1 \quad (\text{و}) \quad \lambda = 0 \quad (\text{هـ})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda = 3 \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة} \quad (\text{أ}) \quad - \quad ٣$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda = -1 \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda = 4 \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة } 4 \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{12} \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda = \sqrt{12} \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة } \sqrt{12} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{12} \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda = -\sqrt{12} \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة } -\sqrt{12} \text{ (د)}$$

(د) لا توجد فضاءات ذاتية .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda = 0 \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة } 0 \text{ (هـ)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda = 1 \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة } 1 \text{ (و)}$$

$$\lambda^3 - 2\lambda = 0 \quad (\text{ب}) \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad (\text{أ}) - \text{هـ}$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (\text{د}) \quad \lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0 \quad (\text{و}) \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \quad (\text{هـ})$$

$$\lambda = 0, \lambda = \sqrt{2}, \lambda = -\sqrt{2} \quad (\text{ب}) \quad \lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3 \quad (\text{أ}) - \text{و}$$

$$\lambda = 2 \quad (\text{د}) \quad \lambda = -8 \quad (\text{ج})$$

$$\lambda = -4, \lambda = 3 \quad (\text{و}) \quad \lambda = 2 \quad (\text{هـ})$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 3, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 2, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 1 \quad (\text{أ}) - \text{و}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(15 + 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = \sqrt{2}, \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(15 - 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}(-1 - 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = -\sqrt{2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 2 \quad (\text{د}) \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = -8 \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 3, \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = -4 \text{ (ج) } \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 2 \text{ (د) }$$

$$(\lambda - 4)^2(\lambda^2 + 3) = 0 \text{ (ب) } \quad (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0 \text{ (أ) - ٨}$$

$$\lambda = 4 \text{ (ب) } \quad \lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1 \text{ (أ) - ٩}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = -1, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = -2, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 1 \text{ (أ) - ١٠}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ الأساس : } \lambda = 4 \text{ (ب)}$$

$$\lambda = -4, \lambda = 3 \text{ (أ) - ١١}$$

$$-2 + \frac{8}{3}x + x^2 : \lambda = -4 \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة}$$

$$5 - 2x + x^2 : \lambda = 3 \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة}$$

$$\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1 \text{ (أ) - ١٢}$$

$$\text{(ب) أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة : } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \lambda = 1, \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : \lambda = -1 \text{ أساس للفضاء الذاتي المناظر للقيمة } 1, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : \lambda = -2 \text{ للقيمة}$$

$$1, -1, -2^9, 2^9 - ١٨$$

تمارين ٦ - ٢ (صفحة ٢٧٢)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - ٥$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - ٦$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - ٧$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad - \quad ٨$$

٩ - لا يمكن تحويله إلى الصورة القطرية .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad - \quad ١٠$$

١١ - لا يمكن تحويله إلى الصورة القطرية .

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \quad ١٢$$

١٣ - لا يمكن تحويله إلى الصورة القطرية .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad - \quad ١٤$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad - \quad ١٥$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad - \quad ١٦$$

$$p_1 = \frac{1}{3} + x, p_2 = x \quad - \quad ١٧$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix} \quad - \quad ١٩$$

تمارين ٦ - ٣ (صفحة ٢٧٨)

١ - (أ) $\lambda = 0$: أحادي البعد ، $\lambda = 2$: أحادي البعد

(ب) $\lambda = 1$: أحادي البعد ، $\lambda = -1$: ثنائي البعد

(ج) $\lambda = 3$: أحادي البعد ، $\lambda = 0$: ثنائي البعد

(د) $\lambda = 0$: أحادي البعد ، $\lambda = 6$: ثنائي البعد

(هـ) $\lambda = 0$: ثلاثي البعد ، $\lambda = 8$: أحادي البعد

(و) $\lambda = -2$: ثلاثي البعد ، $\lambda = 4$: أحادي البعد

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad - \quad \gamma$$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad - \quad \gamma$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \quad - \quad \xi$$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \quad - \quad \theta$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \quad \gamma$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad - \quad \gamma$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad - \quad \lambda$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} - ٩$$

تمارين ٧ - ١ (صفحة ٢٨٦)

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ب}) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{5x} - 2c_2 e^{-x} \\ y_2 &= c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} \end{aligned} \quad (١) - ١$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{40}e^{7x} + \frac{81}{40}e^{-x} \\ y_2 &= -\frac{1}{20}e^{7x} - \frac{27}{20}e^{-x} \end{aligned} \quad (\text{ب}) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{7x} - 3c_2 e^{-x} \\ y_2 &= 2c_1 e^{7x} + 2c_2 e^{-x} \end{aligned} \quad (١) - ٢$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2x} - 2e^{3x} \\ y_2 &= e^x - 2e^{2x} + 2e^{3x} \\ y_3 &= -2e^{2x} + 2e^{3x} \end{aligned} \quad (\text{ب}) \quad \begin{aligned} y_1 &= -c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \\ y_2 &= c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - c_3 e^{3x} \\ y_3 &= 2c_2 e^{2x} - c_3 e^{3x} \end{aligned} \quad (١) - ٣$$

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1 + c_2)e^{2x} + c_3 e^{8x} \\ y_2 &= -c_2 e^{2x} + c_3 e^{8x} \\ y_3 &= -c_1 e^{2x} + c_3 e^{8x} \end{aligned} - ٤$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - ٥$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - ٦$$

تمارين ٧ - ٢ (صفحة ٢٩٢)

$$(1 + \pi) - 2 \sin x - \sin 2x \quad (١) - ١$$

$$(1 + \pi) - 2 \left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} \right] \quad (\text{ب})$$

$$\frac{4}{3}\pi^2 + 4 \cos x + \cos 2x + \frac{4}{3} \cos 3x - 4\pi \sin x - 2\pi \sin 2x - \frac{4\pi}{3} \sin 3x \quad (١) - ٢$$

$$\frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \quad (\text{ب})$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{e-1} e^x \quad - \quad ٣$$

$$(4e - 10) + (18 - 6e)x \quad (١) \quad - \quad ٤$$

$$\frac{3}{\pi} x \quad (١) \quad - \quad ٥$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kx) \quad - \quad ٨$$

تمارين ٧ - ٣ (صفحة ٣٠٢)

$$y^2 \quad (٥) \quad 4x^2 - 2y^2 \quad (د) \quad 5xy \quad (ج) \quad x^2 - xy \quad (ب) \quad 2x^2 - 3xy + 4y^2 \quad (١) \quad - \quad ١$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad (١) \quad - \quad ٢$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (٥) \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (د) \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-7 \ 2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 7 = 0 \quad (١) \quad - \quad ٣$$

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [5 \ 8] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3 = 0 \quad (ب)$$

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0 \quad (ج)$$

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 7 = 0 \quad (د)$$

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [7 \ -8] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 5 = 0 \quad (٥)$$

$$\begin{array}{llll} (١) \text{ قطع ناقص} & (ب) \text{ قطع ناقص} & (ج) \text{ قطع زائد} & (د) \text{ قطع زائد} \\ (٥) \text{ دائرة} & (و) \text{ قطع مكافئ} & (ز) \text{ قطع مكافئ} & (ح) \text{ قطع مكافئ} \\ (ط) \text{ قطع مكافئ} & (ي) \text{ دائرة} & & \end{array}$$

$$9x'^2 + 4y'^2 = 36 \quad (١) \quad \text{قطع ناقص} \quad - \quad ٥$$

$$x'^2 - 16y'^2 = 16 \quad (ب) \quad \text{قطع زائد}$$

$$y'^2 = 8x' \quad (ج) \quad \text{قطع مكافئ}$$

(د) دائرة $x'^2 + y'^2 = 16$

(هـ) قطع زائد $18y'^2 - 12x'^2 = 419$

(و) قطع مكافئ $y' = -\frac{1}{7}x'^2$

٦ - (أ) قطع زائد $2x'^2 - 3y'^2 = 8$

(ب) قطع مكافئ $2\sqrt{2}x'^2 - 7x' + 9y' = 0$

(ج) قطع ناقص $7x'^2 + 3y'^2 = 9$

(د) قطع زائد $4x'^2 - y'^2 = 3$

٧ - قطع ناقص $2x''^2 + y''^2 = 6$ - ٨ قطع زائد $13y''^2 - 4x''^2 = 81$

٩ - قطع زائد $2x''^2 - 3y''^2 = 24$ - ١٠ قطع ناقص $6x''^2 + 11y''^2 = 66$

١١ - قطع زائد $4y''^2 - x''^2 = 0$ - ١٢ قطع مكافئ $\sqrt{29}y'^2 - 3x' = 0$

١٣ - (أ) خطان متقاطعان $y = -x$ ، $y = x$

(ب) لا يوجد منحنى

(ج) المنحنى هو النقطة الوحيدة $(0, 0)$

(د) المنحنى هو المستقيم $y = x$

(هـ) المنحنى يتكون من الخطين المتوازيين $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y = \pm 2$

(و) المنحنى هو النقطة الوحيدة $(1, 2)$

تمارين ٧ - ٤ (صفحة ٣١٠)

١ - (أ) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz$ (ب) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz$

(ج) $xy + xz + yz$ (د) $x^2 + y^2 - z^2$

(هـ) $3z^2 + 3xz$ (و) $2z^2 + 2xz + y^2$

٢ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (د)$$

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [7 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 3 = 0 \quad (أ) - ٣$$

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [-3 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 4 = 0 \quad (ب)$$

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (ج)$$

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 7 = 0 \quad (د)$$

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \ -14 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 9 = 0 \quad (هـ)$$

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [2 \ -1 \ 3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad (و)$$

٤ - (أ) سطح ناقص . (ب) سطح زائدي ذو قطعة واحدة .

(ج) سطح زائدي ذو قطعتين . (د) مخروط ناقص .

(هـ) سطح مكافئ ناقص . (و) سطح مكافئ زائدي .

(ز) سطح كرة .

$$9x'^2 + 36y'^2 + 4z'^2 = 36 \quad (أ) - ٥$$

$$6x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 = 18 \quad (ب)$$

$$3x'^2 - 3y'^2 - z'^2 = 3 \quad (ج)$$

$$4x'^2 + 9y'^2 - z'^2 = 0 \quad (د)$$

$$x'^2 + 16y'^2 - 16z'^2 = 32 \quad (هـ)$$

$$7x'^2 - 3y'^2 + z'^2 = 0 \quad (و)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 25 \quad (ز)$$

$$٦ - (أ) \quad 25x'^2 - 3y'^2 - 50z'^2 - 150 = 0 \quad \text{سطح زائدي ذو قطعتين}$$

$$(ب) \quad 2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 - 5 = 0 \quad \text{سطح ناقصي}$$

$$(ج) \quad 9x'^2 + 4y'^2 - 36z = 0 \quad \text{سطح مكافئ ناقصي}$$

$$(د) \quad x'^2 - y'^2 + z' = 0 \quad \text{سطح مكافئ زائدي}$$

$$٧ - \quad x''^2 + y''^2 - 2z''^2 = -1 \quad \text{سطح زائدي ذو قطعتين}$$

$$٨ - \quad x''^2 + y''^2 + 2z''^2 = 4 \quad \text{سطح ناقصي}$$

$$٩ - \quad x''^2 - y''^2 + z'' = 0 \quad \text{سطح مكافئ زائدي}$$

$$١٠ - \quad 6x''^2 + 3y''^2 - 8\sqrt{2}z'' = 0 \quad \text{سطح مكافئ ناقصي}$$

تمارين ٨ - ١ (صفحة ٢١٧)

$$١ - (أ) \quad 28 \times 10^1 \quad (ب) \quad .3452 \times 10^4 \quad (ج) \quad .3879 \times 10^{-5}$$

$$(د) \quad -.135 \times 10^0 \quad (هـ) \quad .17921 \times 10^2 \quad (و) \quad -.863 \times 10^{-1}$$

$$٢ - (أ) \quad .280 \times 10^1 \quad (ب) \quad .345 \times 10^4 \quad (ج) \quad .388 \times 10^{-5}$$

$$(د) \quad -.135 \times 10^0 \quad (هـ) \quad .179 \times 10^2 \quad (و) \quad -.863 \times 10^{-1}$$

$$٣ - (أ) \quad .28 \times 10^1 \quad (ب) \quad .35 \times 10^4 \quad (ج) \quad .39 \times 10^{-5}$$

$$(د) \quad -.14 \times 10^0 \quad (هـ) \quad .18 \times 10^2 \quad (و) \quad -.86 \times 10^{-1}$$

$$٤ - \quad x_1 = -3, x_2 = 7 \quad - \quad ٥ \quad x_1 = \frac{13}{8}, x_2 = \frac{14}{8}, x_3 = \frac{21}{8}$$

$$٦ - \quad x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3 \quad - \quad ٧ \quad x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$٨ - \quad x_1 = .997, x_2 = 1.00 \quad - \quad ٩ \quad x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$$

$$١٠ - \quad x_1 = 0, x_2 = 1 \quad (\text{بدون استخدام محور الحذف}) \quad , \quad x_1 = 1, x_2 = 1 \quad (\text{باستخدام محور الحذف})$$

تمارين ٨ - ٢ (صفحة ٢٢٣)

$$١ - \quad x_1 \approx 2.81, x_2 \approx .94 \quad \text{الحل المضبوط هو} \quad x_1 = 3, x_2 = 1$$

$$٢ - \quad x_1 \approx .954, x_2 \approx -1.90 \quad \text{الحل المضبوط هو} \quad x_1 = 1, x_2 = -2$$

$$٣ - \quad x_1 \approx -2.99, x_2 \approx -.998 \quad \text{الحل المضبوط هو} \quad x_1 = -3, x_2 = -1$$

$$٤ - \quad x_1 \approx 0.00, x_2 \approx 1.98 \quad \text{الحل المضبوط هو} \quad x_1 = 0, x_2 = 2$$

$$٥ - \quad x_1 \approx 3.03, x_2 \approx 1.02 \quad \text{الحل المضبوط هو} \quad x_1 = 3, x_2 = 1$$

$$٦ - \quad x_1 \approx 1.01, x_2 \approx -2.00 \quad \text{الحل المضبوط هو} \quad x_1 = 1, x_2 = -2$$

$$٧ - \quad x_1 \approx -3.00, x_2 \approx -1.00 \quad \text{الحل المضبوط هو} \quad x_1 = -3, x_2 = -1$$

$$٨ - \quad x_1 \approx .005, x_2 \approx 2.00 \quad \text{الحل المضبوط هو} \quad x_1 = 0, x_2 = 2$$

٩ - $x_1 \approx .492, x_2 \approx .006, x_3 \approx -.996$ الحل المضبوط هو $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = -1$

١٠ - $x_1 \approx 1.00, x_2 \approx .998, x_3 = 1.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

١١ - $x_1 \approx .499, x_2 \approx .0004, x_3 \approx -1.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = -1$

١٢ - $x_1 \approx 1.00, x_2 \approx 1.00, x_3 \approx 1.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

١٣ - أ ، د ، هـ

تمارين ٨ - ٣ (صفحة ٣٣٣)

١ - (أ) $\lambda = 3$ (ب) لا توجد قيمة ذاتية سائدة ، (ج) $\lambda = 6$ (د) $\lambda = 3$

٢ - (أ) $\begin{bmatrix} 1.00 \\ .503 \end{bmatrix}$ (ب) 5.02

(ج) المتجه الذاتي السائد هو $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، القيمة الذاتية السائدة هو 5

(د) الخطأ المئوي هو 4%.

٣ - (أ) $\begin{bmatrix} 1.00 \\ .750 \end{bmatrix}$ (ب) 8.01

(ج) المتجه الذاتي السائد هو $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ، القيمة الذاتية السائدة هي 8

(د) الخطأ المئوي هو 125%.

٤ - (أ) $\begin{bmatrix} 1.00 \\ -.560 \end{bmatrix}$ (ب) -4.00

(ج) المتجه الذاتي السائد هو $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، القيمة الذاتية السائدة هي -4

(د) الخطأ المئوي هو 0%

٥ - (أ) بعد إتمام تكرارين تكون القيمة الذاتية السائدة ويكون المتجه الذاتي السائد تقريبا هما

$x \approx \begin{bmatrix} 1 \\ .119 \end{bmatrix}$ و $\lambda_1 \approx 20.1$

(ب) القيمتان المضبوطتان للقيمة الذاتية السائدة والمتجه الذاتي السائد هما $\lambda_1 = 20$

و $x = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{17} \end{bmatrix}$

٦ - (أ) بعد إتمام ثلاثة تكرارات تكون القيمة الذاتية السائدة ويكون المتجه الذاتي السائد تقريبا هما

$x \approx \begin{bmatrix} -.978 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\lambda_1 \approx -9.95$

(ب) القيمتان المضبوطتان للقيمة الذاتية السائدة والمتجه الذاتي السائد هما $\lambda_1 = -10$ و $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$10.0 \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} .027 \\ .027 \\ 1 \end{bmatrix} (\uparrow) - v$$

$$(ج) \text{ المتجه الذاتي السائد هو } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ القيمة الذاتية السائد هي } 10$$

تمارين ٨ — ٤ (صفحة ٣٣٨)

$$\lambda_2 \approx 2.00, v_2 \approx \begin{bmatrix} -.51 \\ 1 \end{bmatrix} (\text{ج}) \quad 7.00 \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ .509 \end{bmatrix} (\uparrow) - ١$$

(د) القيمتان الذاتيتان المضبوطتان 7 ، 2 ، المتجهان الذاتيان المضبوطان

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \approx 2.02, v_2 \approx \begin{bmatrix} -.532 \\ 1 \end{bmatrix} (\text{ج}) \quad 12.0 \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ .503 \end{bmatrix} (\uparrow) - ٢$$

(د) القيمتان الذاتيتان المضبوطتان 12 ، 2 ، المتجهان الذاتيان المضبوطان

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

قائمة المصطلحات العلمية

الفصل الاول

System	نظام
Linear equations	معادلات خطية
Soultion	حل
Solution set	فئة الحل
Consistent	متآلف (متوافق)
Inconsistent	متناقض (غير متآلف)
Matrix	مصفوفة
Augmented matrix	المصفوفة الممتدة
Elementary row operation	عملية صفوف بسيطة
Row echelon form	صورة صفية مميزة
Reduced row echelon form	صورة صفية مميزة مختزلة
Elimination	حذف
Row	صف
Column	عمود
Homogeneous	متجانس
Trivial solution	حل تافه
Nontrivial solution	حل غير تافه
Entries	مكونات - عناصر
Square matrix	مصفوفة مربعة
Order	نوع
Main diagonal	قطر رئيسي
Coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Zero matrix	مصفوفة صفيرية
Identity matrix	مصفوفة الوحدة

Invertible	قابل للانعكاس
Inverse	انعكاس
Elementary matrix	مصفوفة بسيطة
Row equivalent	متكافؤ صفيا

الفصل الثاني

Determinant	محدد
Permutation	تبديلة
Even permutation	تبديلة زوجية
Odd permutation	تبديلة فردية
Inversion	تعاكس
Elementary product	حاصل ضرب بسيط
Determinant function	دالة المحدد
Upper triangular	مثلث علوى
Lower triangular	مثلث سفلى
Transpose	تحوير
Operation	عملية
Expansion	مفكوك
Symmetric	متماثل
Skew symmetric	معتل التماثل
Rule	قاعدة

محسن يوسف اللومى

الفصل الثالث

Vector	متجه
Space	فضاء
Initial point	نقطة بداية
Terminal point	نقطة نهاية
Equal	متساوى
Sum	جمع
Zero vector	المتجه الصفري

Negative	سالب
Additive inverse	انعكاس الجمع
Scalar	عدد قياسي
Product	ناتج الضرب
Component	مركبة
Rectangular coordinates	أحداثيات متعامدة
Coordinate axes	محاور الأحداثيات
Plane	مستوى
Coordinate planes	مستويات الأحداثيات
Right handed system	نظام يد يميني
Left handed system	نظام يد يسرى
Norm	مقياس
Dot product	ضرب داخلي
Projection	إسقاط
Inner product	ضرب داخلي
Euclidean inner product	ضرب داخلي أقليدي
Angle	زاوية
Orthogonal projection	مسقط عمودي
Cross product	ضرب اتجاهي
Unit vector	متجه عياري
Standard unit vector	متجه عياري معياري
Point normal form	صيغة النقطة والعمود
General form	الصيغة العامة
Parametric equations	معادلات بارامترية
Symmetric equations	معادلات متماثلة

الفصل الرابع

Vector space	فضاء خطي ، فضاء اتجاهي
Euclidean n-space	فضاء أقليدي نوني
Ordered n-tuple	قوس نوني مرتب
Scalar multiple	مضاعف قياسي

Standard operations	عمليات معتادة
Euclidean distance	مسافة أقليدية
Complex vector space	فضاء خطي مركب
Zero vector space	فضاء خطي صفري
Closed	مغلق
Sub-space	فضاء جزئي
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Solution vector	متجه حل
Solution space	فضاء حل
Linear combination	تركيبية خطية
Span	ينشأ
Space spanned by	الفضاء المنشأ من
Linear independence	استقلال خطي
Basis	أساس
Dimension	بعد
Standard basis	أساس معتاد
Finite dimensional	منتهى البعد ، ذو بعد منتهى
Infinite dimensional	لا نهائي البعد
Row space	فضاء الصفوف
Column space	فضاء الأعمدة
Rank	رتبة
Row vectors	متجهات الصفوف
Column vectors	متجهات الأعمدة
Inner product space	فضاء الضرب الداخلي
Inequality	متباينة
Length	الطول
Orthogonal	عمودي
Orthogonal basis	أساس متعامد
Orthonormal	عيارى متعامد
Best approximation	التقريب الأمثل
Coordinate vector	متجه إحداثيات
Coordinate matrix	مصفوفة إحداثيات

Transition matrix
Rotation
Transformation

مصفوفة انتقال
دوران
تحويل

الفصل الخامس

Linear transformation
Map
Image
Multiplication by A
Matrix transformation
Zero transformation
Linear operator
Dilation
Contraction
Kernel
Range
Null space
Nullity
Similarity

تحويل خطي
برسم
صورة
ضرب في A
تحويل مصفوفات
تحويل صفري
مؤثر خطي
تمديد
تقليص
نواة
المدى
نواة (فراغ صفري)
صفريّة
اتساق

الفصل السادس

Eigen
Eigen value
Eigen vector
Proper value
Characteristic value
Latent root

ذاتي
قيمة ذاتية
متجه ذاتي
قيمة خاصة (قيمة ذاتية)
قيمة مميزة (قيمة ذاتية)
جذر كامن (جذر ذاتي)

الفصل السابع

Application
General solution
Particular solution

تطبيقات
حل عام
حل خاص

Initial value proplem	مسئلة قيمة ابتدائية
Approximation problems	مسائل التقريب
Fourier series	متسلسلة فوريير
Least square	المربعات الصغرى
Trigonometric polynomial	كثيرة حدود مثلثية
Quadratic	تربيعى
Conic section	مقطع مخروطى
Ellipse	قطع ناقص
Circle	دائرة
Hyperbola	قطع زائد
Parabola	قطع مكافئ
Quadratic surfaces	أسطح تربيعية

الفصل الثامن

Pivot	الارتكاز
Mantissa	عشرية
Significant	معنوى
Rounded value	قيمة دائرية
Iteration	تكرار
Displacement	إزاحة
Dominant	سائد
Estimation	تقدير
Error	خطأ

الفهرس

انغلاق	اتفاق ٢٥٥
بالنسبة للجمع ١٤٠	احداثيات
بالنسبة للضرب في أعداد قياسية ١٤٠	بالنسبة للأساس ٢٠٢
	متجه ٢٠٢
بمد ١٦١	مصفوفة ٢٠٢
بعد منتهى ١٦٠	نقطة ٩٢ ، ١٢٨
	أرقام بنظام عشري ٣١٢
تبديلة ٥٧	إزاحة ٣١٩
زوجية ٥٩	أساس ١٥٧
فردية ٥٩	معتاد ١٥٧ ، ١٥٩
تحليل المتجه ١٠٦	P_n المعتاد ١٥٩
تحويل ٦٩	R^n المعتاد ١٥٧
تحويل	إسقاط عمودى ١٠٦ ، ١٩١ ، ٢٢٩
أحداثيات متعامدة ٢١٣	أصل ٩٢
المصفوفة ٢٢٣	أعداد
بالتفاضل ٢٢٨ ، ٢٢٩	في نظام ثنائى ٣١٢
بالتكامل ٢٢٨ ، ٢٢٩	قياسية ٢٣ ، ٨٨
خطى ٢٢٥	أعمدة مصفوفات ٢٢
تركيبية خطية ١٤٣	إكمال مربع ٢٩٧
تساوى	انتقال ٢٠٦
التجهات ٩٠ - ٩١ ، ١٢٩	انحراف ٢٨٧
المصفوفات ٢٣	انعكاس
تعريف	تبديلة ٥٨ .
المحدد ٦١	مصفوفة ٣٥
المصفوفة ٢٢	مصفوفة من نوع 2×2 ٣٦

تعميم نظرية فيثاغورث ١٨٥

تغيير الأساس ٢٠٤

تقريب أمثل ١٩٦

تكافؤ صفى ٤٣

تكرارات ٣٢٠

تكرار جاكوب ٣١٩

تكرار جاوس - سيدل ٣٢٠

تمديد ٢٢٥

ثلاثى مرتب ١٢٨

جاوس كارل فريدريش ١١

جذور ذاتية ٢٥٧

جرام ١٩٣

جمل المتجه عيارى ١٨٩

جمع

المتجهات ٨٩ ، ١٢٩ ، ١٣٤

المصفوفات ٢٣

جوردان ١١

جيوب التماس الاتجاهية ١٠٨

حاصل الضرب الاتجاهى ١٠٩

حذف

بالارتكاز ٣١٣

بطريقة جاوس ١٥

بطريقة جاوس جوردان ١١

حل

غير تافه ٣١٣

معادلة خطية ١

نظام معادلات خطية ٢

٣٨٢

خطأ

دائرى ٣١٢

منوى ٣٣٠

منوى مقدر ٣٣١

نسبى مقدر ٣٣١

خواص

التحويل ٧٠

الضرب الداخلى ١٠٥

دليل المصفوفة ٢٦٤

دوران المحاور ٢٠٨ ، ٢٠٩

ذات الحدود الذاتية ٢٦٤

رايل جون ٣٢٧

رئيسى ١٥٧

رتبة ٢٣ ، ٢٨٩

تحويل ٢٣٤

مصفوفة ٢٢ ، ١٦٩

رمز المصفوفة للمتجه ١٣٢

رونسكيان ١٥٧

زاوية بين متجهين ١٠٢ ، ١٨٣

زوج مرتب ١٢٨

سائد قطرى ٣٢٢

سطح

مكافئ ناقص ٣٠٧

من الدرجة الثانية ٣٠٦

ناقص ٣٠٦

طرح

متجه ٩٨

متجهات ٩٠ ، ١٢٩

مصنوفات ٢٤ ، ٢٥

طريقة

التكرار ٣٢٨

القوى ٣٢٨

طول المتجه ٩٩

شجرة التبديلة ٥٧

شرط ابتدائي ٢٨٠

شميدت إيرهارد ١٩٣

شوارتز ١٧٨

صف ٢٢

صف مصفوفة ٢٢

صفرية التحويل ٢٣٤

صورة ٢٢٢

صفية للمصفوفة ٨

صفية مميزة للمصفوفة ٨

صيغة

العمودي لمعادلة المستوى ١١٩

تربيع مصاحبة ٢٩٤ ، ٣٠٥

عامة للمستوى ١٢٠

عشرية ٣١٢

عمليات متبادلة في R^n ١٢٩

علية

جرام -- شميدت ١٩٣ ، ١٩٤

صفوف بسيطة ٥

عمود مصفوفة ٢٢

عمودي على المستوى ١١٨

عناصر مكونات المصفوفة ٢٢

عنصر الحذف ٣١٣

ثقة

حل ٢

(متجهات) عمودية ١٨٨

متجهات غير مستقلة خطيا ١٥٠

(متجهات) عمودية عيارية ١٨٨

متجهات مستقلة خطيا ١٥٠

فرض

التجانس ١٧٥

التجميع ١٧٥

التمائل ١٧٥

ضرب

بسيط ٦٠

بسيط تبادلي ٦٠

داخل ١٠٢

داخل أقلدي ١٠٢ ، ١٣٠

متجه بعدد قياسي ٩٠ ، ١٢٩ ، ١٣٤

مصفوفات ٢٥

مصفوفة في عدد قياسي ٢٤

مصفوفة كتحويل ٢٢٣

فروض

الفضاء الخطى ١٣٤

فضاء الضرب الداخلى ١٣٤

فضاء

أعمدة ١٦٦.

أقليدى من ٨ بعدا ١٣٢

الحل ١٤٣

جزئى ١٤٠

جزئى لفضاء خطى ١٤٠

خطى ١٣٤

فضاء خطى عام ١٣٤

خطى لا نهائى ١٦٠

خطى مركب ٢٥٩

خطى منشأ ١٤٦

ذاق ٢٦٠

ذاق لمؤثر خطى ٢٦٢

صغرى (نواة) ٢٣٢

منشأ ١٤٦

نوى ١٢٨

فك المحدد ٧٨ ، ٧٩

فوريير ٢٩١

قاعدة

كرامر ٨٣

يد يمينى ١١٣

قانون

الإبدال للجمع ٣١

الإبدال للضرب ٣١

التوزيع ٣١

الحذف ٣٣

الدمج ٣١

قطر رئيسى ٢٣

للمصفوفة ٣٤

قطع

زائد ٢٩٤

زائدى ذو طية واحدة ٣٠٦

زائدى ذو طيتين ٣٠٦

مكافئ ٢٩٤

مكافئ زائدى ٣٠٧

ناقص ٢٩٤

قسم

ذاتية ٢٥٧

ذاتية مركبة ٢٥٩

قيمة

ذاتية ٢٦٢

ذاتية سائدة ٣٢٥

ذاتية لمؤثر خطى ٢٦٢

كثيرة حدود

ليجندير العيارية ١٩٩

مثلثية ٢٨٩

كوشى ١٧٨

مؤثر

تقليص ٢٢٥

محاييد ٢٢٥

متباينة

المثلث ١٨٢

كوشى ١٧٨

كوشى شوارتز ١٧٨ ، ١٨٢

سافة	متجه ٨٨ ، ١٣٤
أقليدية ١٣١	أعمدة ١٦٦
بين متجهين ١٨١	حل ١٤٣
بين نقطتين ١٨١	ذاتي ٢٥٧
مسألة متجه ابتدائي ٢٨٠	ذاتي سائد ٣٢٥
مستويات أحداثيات ٩٢	ذاتي لمؤثر ٢٦٢
مصاحب ٨١	صغرى ٨٩ ، ١٢٩
مصنوفة	هندسي ٨٨
تحويل ٩٦	متجهات
تحويل خطي ٣٠٩	عمودية عيارية ١٨٨
صفري ٣٢	عيارية معادة ١١١
صينة تربيعية ٢٩٨	غير مستقلة خطيا ١٥٠
عمودية ٢١١	معامدة ١٠٦ ، ١٨٤
قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ٢٦٥	متكافئة ٨٨
قابلة للانعكاس ٣٥	مستقلة خطيا ١٥٠
قطرية ١١ ، ٢٥٤	متسلسلة فوريير ٢٩٢
مثلثية ٦٣	متغيرات رئيسية ١٠
معادة ٢٤١	متطابقة لاجرانج ١١٠
ملتوية التماثل ٧٦	متوسط مربعات صغرى ٢٨٨
ممتدة ٤	محاور أحداثيات ٩٢
وحدة (محايدة) ٣٤	محدد مصفوفة 2×2 ٦١
مصفوفات	3×3 ٦١
متفقة ٢٥٥	مخروط
متفقة بالتعامد ٢٧٩	تحويل ٣٠٤
مضاعف قياسي ١٢٩ ، ١٣٤	ناقصي ٣٠٦
معادلة	مدى ٢٣٢
تربيعية في x, y ٢٩٤	المصفوفة ٢٣٢
تربيعية في x, y, z ٣٠٥	مركبة
تفاضلية ٢٨٠	عمودية ١٠٦ ، ١٩١
تفاضلية (حل خاص) ٢٨٠	متجه ٩١ ، ٩٤ ، ١٢٨
تفاضلية (حل عام) ٢٨٠	مساحة ١١٤

أحداثيات يد يسرى ٩٢ ، ٩٤	خطية ١
أحداثيات يد يسرى ١١٣	ذاتية ٢٥٨
غير متآلف ٣	رايل ٣٢٧
فيزيائي خطي ٥٢	عامة للمستوى ١٢٠
متآلف ٣	متألفة ١٢٥
متجانس ١٨	معادلات
معتل الشروط ٣١٧	الانتقال ٣٨
معادلات خطية ٢	بارامترية ١٢٣
معادلات خطية غير متآلفة ٣	بارامترية للمستقيم ١٢٣
معادلات خطية متآلفة ٣	متألفة للمستقيم ١٢٥
نظرية	مكوس مصفوفة ٣٥
الأبعاد ٢٣٥	مقطع
الإسقاط ١٩٥	مخروط ٢٩٥
نظرية التقريب الأمثل ١٩٦	مخروط منحل ٢٩٥
المحاور الأساسية للفضاء R^2 ٢٩٩	مخروط غير منحل ٢٩٥
المحاور الأساسية للفضاء R^3 ٢٠٨	مقياس
نقطة	أقليدي ١٣١
بداية ٨٨	منج ٩٩ ، ١٨١
نهاية ٨٨	
في R^n ١٢٨	
نواة ٢٣٢	نظام
مصفوفة ٢٣٢ ، ٢٣٣	أحداثيات متعامد ٩٣ ، ٩٤

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

حسن يوسف المصري



رقم الايداع بدار الكتب

١٩٨١ / ٢٨٦٦

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبتي الخاصة

على موقع ارشيف الانترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem



هذا الكتاب هو أحد كتب برنامج Wiley Arabooks الذي وضع
لتلبية الحاجة الماسة لتوفير كتب دراسية علمية باللغة العربية. يتضمن
البرنامج ترجمات عربية لبعض الكتب القيمة التي تصدرها دار جون وايلي،
بالإضافة إلى كتب جيدة مؤلفة أصلاً باللغة العربية.



محمد یونس (الکونین)

متاح للتحميل ضمن مجموعة كبيرة من المطبوعات من صفحة

مكتبي الخاصة

على موقع إرشيف الإنترنت

الرابط

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

JOHN WILEY & SONS, INC.
605 Third Avenue
New York, N.Y. 10158
U.S.A.

ANTON
LINEAR ALGEBRA
Second Edition

مطابع دار نشر اسلامبول

ISBN 0-471-06389-4